Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

UNE PRÉSENTATION ADÉLIQUE DE LA SÉRIE SINGULIÈRE ET DU PROBLÈME DE WARING

par Gilles LACHAUD

INTRODUCTION

Si F est une forme entière à n variables, notons $U_{\mathbf{A}}(t)$, pour $t \in \mathbf{Z}$, l'ensemble des points adéliques de la variété algébrique définie par la relation $F(x) = t$. Lorsque F est la forme de Fermat

$$F(x) = x_1^d + \ldots + x_n^d,$$

G. H. Hardy et J. E. Littlewood ont appelé *Série Singulière* ce que nous écrivons maintenant

$$S_{\mathbf{A}}(t) = \int_{U_{\mathbf{A}}(t)} \phi(x)\, \omega_t(x)$$

où ω_t est la forme de Leray sur $U_{\mathbf{A}}(t)$, et où ϕ est une certaine fonction standard sur $\mathbf{A}^n$.

Lorsque F est une forme quadratique, c'est A. Weil qui a introduit ces intégrales sous cette forme dans [9], pour établir ce qu'il a nommé la *formule de Siegel.* Celle-ci établit un lien entre l'intégrale $S_{\mathbf{A}}(t)$ et le nombre

$$N(t) = \# \{x \in \mathbf{Z}^n \mid F(x) = t\},$$

qui s'écrit aussi

$$N(t) = \sum_{U_{\mathbf{Q}}(t)} \phi(x).$$

Pour les formes de degré supérieur, le théorème de Hardy-Littlewood affirme que si F est la forme de Fermat, on a

$$N(t) \sim S_{\mathbf{A}}(t)$$

lorsque t tend vers l'infini, si $n > 2^d$; ceci implique, puisque $S_{\mathbf{A}}(t)$ tend vers l'infini avec t, que tout nombre entier assez grand est somme de n puissances d'ordre d.

Pour les formes de degré supérieur la série singulière à été étudiée dans le cadre adélique par T. Ono [7] et J. I. Igusa [5], [6]. Leurs conclusions sont rassemblées dans le chapitre I. On pouvait penser qu'il était possible d'établir dans ce cadre le résultat de Hardy et Littlewood : c'est ce que nous avons fait au chapitre II, en reprenant la *méthode du cercle* adaptée ici au cercle adélique $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ et en utilisant la Formule de Poisson comme le suggèrent naturellement les expressions de $S_{\mathbf{A}}(t)$ et de $N(t)$.

Nous espérons que l'approche que nous présentons ici permettra de traiter le problème de Waring avec plus d'aisance dans le cas des autres corps adéliques, qu'il s'agisse des corps de nombres algébriques ou des corps de fonctions, et aussi dans d'autres cas que celui de la forme de Fermat.

J'ajoute que cet article est résumé dans [11], et que les résultats de [1] utilisés ici sont repris dans le livre [12], qui vient de paraître au moment de la publication de ce volume.

Je tiens à remercier J. P. Serre pour l'intérêt qu'il a montré pour le présent travail, et aussi pour m'avoir communiqué deux lettres que P. Deligne lui a adressées (datées des 14 et 17 novembre 1971) ; J. J. Sansuc, de qui j'ai appris l'existence du mémoire [10] après la rédaction du présent article ; et R. Danset pour sa lecture attentive du manuscrit.

Chapitre I. La transformation de Gauss

1. Définitions. Notons P l'ensemble des nombres premiers, $|x|_p$ la valeur absolue p-adique du nombre $x \in \mathbf{Q}$, et $|x|_0$ sa valeur absolue archimédienne. L'ensemble $\overline{P} = P \cup \{0\}$ est l'ensemble des places de $\mathbf{Q}$. Nous noterons $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$.

Pour tout $x \in \mathbf{Q}_p$, écrivons

$$x = \sum_{n \in \mathbf{Z}} x_n p^n \quad \text{avec} \quad x_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \tag{1}$$

(somme qui ne comporte qu'un nombre fini de termes d'indice négatif non nuls) et posons

$$< x > = \sum_{n < 0} x_n \, p^n \, ; \tag{2}$$

on a

$$x = < x > + [x] \, ,$$

avec $< x > \in \mathbf{Q}, 0 \leqslant < x > < 1, [x] \in \mathbf{Z}_p$.