

# Chapitre II. Le théorème de Hardy-Littlewood

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

où  $S_p(t)$  est la série singulière locale de  $F$  en  $p$ , et

$$S_{\mathbf{A}}(t) = S_0(t) S_f(t);$$

la fonction  $S_{\mathbf{A}}(t)$  est appelée *la série singulière globale de la forme  $F$* . Introduisons enfin une dernière condition :

(SS 5) *Il existe  $T > 0$  telle que la fonction  $\phi_0 \in \mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$  soit égale à 1 sur le compact*

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid F(x) \leq T\}.$$

Il vient donc immédiatement :

PROPOSITION 1.19. *Sous les conditions (SS 1) à (SS 5), on a*

$$S_{\mathbf{A}}(t) = S_{\mathbf{A}}(\phi, t)$$

si  $t \leq T$ .

## CHAPITRE II. LE THÉORÈME DE HARDY-LITTLEWOOD

Dans ce chapitre, on considère la *forme de Fermat*

$$(1) \quad F(x) = x_1^d + \dots + x_n^d$$

où  $d$  est un entier pair ; et on va étudier le comportement asymptotique de la suite

$$(2) \quad N(t) = \# \{x \in \mathbf{Z}^n \mid F(x) = t\},$$

lorsque  $t \in \mathbf{N}$  tend vers l'infini. Le théorème de Hardy-Littlewood (cf. [4], P.N. II) s'énonce *ainsi* :

THÉORÈME 2.1. *Supposons  $d \geq 3$  et  $n > 2^d$ .*

*On a alors*

$$N(t) = S_{\mathbf{A}}(t) (1 + o(t^{-\theta}))$$

*lorsque  $t$  tend vers l'infini, avec  $\theta > 0$ .*

Remarquons que pour établir le théorème 2.1., il suffit de démontrer que l'on

a

$$(3) \quad N(t) = S_{\mathbf{A}}(t) + O(t^{(n/d)-1-\theta});$$

on a en effet

$$(4) \quad S_{\mathbf{A}}(t) = S_0(t) S_f(t);$$

mais le corollaire 1.16. et la proposition 1.17. impliquent que l'on a

$$(5) \quad 1 \ll S_f(t) \ll 1,$$

et

$$(6) \quad S_0(t) = V_0(t)^{(n/d)-1};$$

ceci montre que la relation (3) implique le théorème 2.1.

On pose maintenant

$$R = [t^{1/d}] + 1,$$

et  $\|x\|_0 = \text{Max}(|x_1|_0, \dots, |x_n|_0)$  si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ . On constate que si  $\|x\|_0 > R - 1$ , alors  $F(x) > t$ .

Soit  $\chi_R$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $|x|_0 < R$  de la droite réelle, et  $\psi$  une fonction  $C^\infty$  positive sur  $\mathbf{R}$ , telle que

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(x) dx = 1,$$

et  $\psi(x) = 0$  si  $|x|_0 \geq 1/3$ ; on pose

$$(7) \quad \varphi_0 = \chi_R * \psi,$$

de telle sorte que la fonction  $\varphi_0$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}$ , que le support de  $\varphi_0$  est inclus dans l'intervalle  $|x|_0 \leq R + (1/3)$ , et que le support de la dérivée de  $\varphi_0$  est inclus dans l'ensemble  $R - (1/3) \leq |x|_0 \leq R + (1/3)$ . La fonction  $\varphi_0$  est donc constante et égale à  $\varphi_0(0) = 1$  si  $|x|_0 \leq R - (1/3)$ , et nulle si  $|x|_0 \geq R + (1/3)$ .

Pour tout  $p \in P$ , on note  $\varphi_p$  la fonction caractéristique de  $\mathbf{Z}_p$  dans  $\mathbf{Q}_p$ . Ceci dit, pour  $x \in \mathbf{A}$ , on pose

$$(8) \quad \varphi(x) = \prod_{p \in P} \varphi_p(x);$$

si  $p \in \bar{P}$  et si  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , on pose, dans ce chapitre II,

$$(9) \quad \phi_p(x) = \varphi_p(x_1) \dots \varphi_p(x_n)$$

de telle sorte que l'on a, si  $x \in \mathbf{A}^n$ ,

$$(10) \quad \phi(x) = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n).$$

Avec ces notations, on a

$$(11) \quad N(t) = \# \{x \in \mathbf{Q}^n \mid \phi(x) = 1 \text{ et } F(x) = t\},$$

puisque la condition  $\phi(x) = 1$  est équivalente aux deux conditions  $x \in \mathbf{Z}_p^n$  pour tout  $p \in P$ , et  $\phi_0(x) = 1$ ; or si  $F(x) = t$ , on a  $\phi_0(x) = 1$ . Pour  $\xi \in \mathbf{A}$ , nous allons étudier la somme trigonométrique

$$(12) \quad f(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}} \phi(x) \chi(x^d \xi),$$

qui est une somme finie puisqu'elle porte au plus sur les  $x \in \mathbf{Z}$  tels que  $\|x\|_0 < R$ . Il vient immédiatement

$$(13) \quad f(\xi)^n = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \phi(x) \chi(\xi F(x)).$$

La fonction  $f(\xi)^n$  est l'analogue de la fonction de Gauss de  $F$ , en ce sens que dans la relation (13) on somme sur  $\mathbf{Q}$  au lieu d'intégrer sur  $\mathbf{A}$ . En regroupant dans (13) les vecteurs  $x$  ayant même image par  $F$ , il vient

$$f(\xi)^n = \sum_{t \in \mathbf{Q}} \chi(\xi t) \sum_{F(x) = t} \phi(x);$$

puisque les relations  $\phi(x) \neq 0$  et  $x \in \mathbf{Q}^n$  impliquent  $x \in \mathbf{Z}^n$  et  $\phi_0(x) \neq 0$ , puisque pour  $x \in \mathbf{Z}^n$ , on a

$$\phi_0(x) = 1 \quad \text{si} \quad \|x\|_0 \leq R - 1$$

et

$$\phi_0(x) = 0 \quad \text{si} \quad \|x\|_0 \geq R,$$

et puisqu'enfin si  $\|x\|_0 \geq R$ , on a  $F(x) > t$ , il s'ensuit que

$$(14) \quad \sum_{F(x) = t} \phi(x) = N(t)$$

si  $t \in \mathbf{Z}$ ; et si  $t \notin \mathbf{Z}$  tous les termes de cette somme sont nuls. On a donc

$$(15) \quad f(\xi)^n = \sum_{t \in \mathbf{Z}} N(t) \chi(t\xi),$$

et en utilisant la formule d'inversion de Fourier, qui s'applique bien évidemment ici puisque la somme du second membre de (14) est finie, on parvient au résultat suivant :

PROPOSITION 2.2. Si  $t \in \mathbf{N}$  on a, avec les notations précédentes,

$$N(t) = \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} f(\xi)^n \chi(-t\xi) d\xi.$$

Posons maintenant, pour  $\xi \in \mathbf{A}$ ,

$$(16) \quad g(\xi) = \int_{\mathbf{A}} \varphi(x) \chi(x^d \xi) dx.$$

PROPOSITION 2.3. Si  $n > 2d$  et  $d \geq 3$ , alors

$$S_{\mathbf{A}}(t) = \int_{\mathbf{A}} g(\xi)^n \chi(-t\xi) d\xi.$$

*Démonstration.* La définition (16) de  $g$  et les définitions (8) et (10) de  $\varphi$  et  $\phi$  impliquent que l'on a

$$(17) \quad g(\xi)^n = G_{\mathbf{A}}(\phi, \xi)$$

pour tout  $\xi \in \mathbf{A}$ ; et ici les conditions (SS 1) à (SS 5) du chapitre I sont remplies; le théorème 1.18. implique que l'on a

$$\int_{\mathbf{A}} g(\xi)^n \chi(-t\xi) d\xi = \hat{G}_{\mathbf{A}}(\phi, -t) = S_{\mathbf{A}}(\phi, t)$$

et par la proposition 1.19, on a

$$S_{\mathbf{A}}(\phi, t') = S_{\mathbf{A}}(t')$$

pour  $t' \leq t$ , ce qui démontre la proposition 2.3.

Les propositions 2.2. et 2.3. montrent que la relation (3) se réécrit :

$$(18) \quad \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} f(\xi)^n \chi(-t\xi) d\xi - \int_{\mathbf{A}} g(\xi)^n \chi(-t\xi) d\xi = O(t^{(n/d)-1-\theta}).$$

Pour établir cette relation, nous allons utiliser une partie  $M$  de  $\mathbf{A}$ , l'ensemble majeur, tel que  $f(\xi)^n$  et  $g(\xi)^n$  soient négligeables hors de  $M$  et tel que la différence  $f(\xi)^n - g(\xi)^n$  soit négligeable dans  $M$ . En fait, si  $\delta > 0$ , on pose

$$(19) \quad M = \{\xi \in \mathbf{A} \mid |\xi|_0 \leq R^{-d+\delta} \text{ et } Q(\xi) \leq R^{\delta}\}$$

où  $Q(\xi)$  est défini par la relation (12) du chapitre I.

LEMME 2.4. Soit  $\pi$  la projection de  $\mathbf{A}$  sur  $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ . Alors si  $0 < A < B$ , la restriction de  $\pi$  à l'ensemble

$$\{\xi \in \mathbf{A} \mid |\xi|_0 \leq (2B)^{-1} \text{ et } Q(\xi) \leq A\}$$

est injective.

*Démonstration.* Si  $\xi$  et  $\xi'$  sont dans  $\mathbf{A}$ , on a les relations:

$$(20) \quad Q(\xi + \xi') \leq \text{Max}(Q(\xi), Q(\xi')),$$

$$(21) \quad Q(-\xi) = Q(\xi).$$

Si  $\xi$  et  $\xi'$  sont dans l'ensemble décrit dans le lemme, on a donc

$$Q(\xi - \xi') \leq A \text{ et } |\xi - \xi'|_0 \leq B^{-1}$$

d'où s'ensuit

$$|\xi - \xi'|_0 Q(\xi - \xi') \leq AB^{-1} < 1.$$

Or si  $\eta \in \mathbf{Q}^*$ , on a

$$|\eta|_0 Q(\eta) \geq 1;$$

il s'ensuit que si  $\xi - \xi' \in \mathbf{Q}$ , alors  $\xi = \xi'$ .

On notera  $\overline{M}$  l'image de l'ensemble majeur  $M$  (défini par la relation (19)) par l'application  $\pi$ ; le lemme 2.4. montre que  $\pi$  est une bijection de  $M$  sur  $\overline{M}$ . On appelle  $\overline{M}$  l'arc majeur de  $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ , et on pose

$$(22) \quad \overline{m} = (\mathbf{A}/\mathbf{Q}) - \overline{M};$$

l'ensemble  $\overline{m}$  est l'arc mineur. Le résultat le plus délicat dans la démonstration du théorème de Hardy-Littlewood est l'évaluation de  $f(\xi)^n$  sur  $\overline{m}$ . On va établir le résultat suivant:

THÉORÈME 2.5. Supposons  $n > 2D$  et  $\delta < 1$ . On a alors

$$\int_{\overline{m}} |f(\xi)|^n d\xi \ll R^{n-d-\theta_1},$$

avec  $\theta_1 > 0$ .

La démonstration du théorème 2.5. repose sur des résultats d'approximation diophantienne. Le premier est simple:

LEMME 2.6. *Quel que soit  $N > 0$ , la restriction de  $\pi$  à l'ensemble*

$$(23) \quad D(N) = \{\xi \in \mathbf{A} \mid |\xi|_0 Q(\xi) < N^{-1} \text{ et } Q(\xi) \leq N\}$$

*est surjective.*

En effet, soit  $\xi \in \mathbf{A}$ ; il existe un  $x_0 \in \mathbf{Q}$  tel que  $\xi_1 = x_0 - \xi \in \mathbf{Z}_p$  pour tout  $p$ , i.e.  $Q(\xi_1) \leq 1$ . Par ailleurs, le théorème d'approximation de Dirichlet implique qu'il existe  $x_1 \in \mathbf{Q}$  tel que

$$|\xi_1 - x_1|_0 \leq Q(x_1)^{-1} N^{-1} \text{ et } Q(x_1) \leq N.$$

Posons  $\xi_2 = \xi_1 - x_1$ ; on a  $Q(\xi_2) \leq \text{Max}(Q(\xi_1), Q(x_1)) \leq \text{Max}(1, N) \leq N$  et il s'ensuit donc que  $\xi_2 \in D(N)$ .

Le deuxième résultat est plus subtil: c'est l'inégalité de Weyl:

LEMME 2.7. *Soit  $K$  un polynôme à coefficients réels, de degré  $d$  et de coefficient du terme de plus haut degré égal à  $\alpha$ :*

$$K(x) = \alpha x^d + \alpha_1 x^{d-1} + \dots,$$

*et supposons que le nombre  $\alpha$  admette une approximation par un nombre rationnel  $a/Q$  tel que*

$$(a, Q) = 1, \quad Q \geq 1, \quad \left| \alpha - \frac{a}{Q} \right| \leq \frac{1}{Q^2}.$$

*Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$(24) \quad \left| \sum_{|x|_0 \leq R} \exp(2i\pi K(x)) \right| \leq C R^{1+\varepsilon} (R^{-(1/D)} + Q^{-(1/D)} + (R^d/Q)^{-(1/D)}),$$

*avec  $D = 2^{d-1}$  et où  $C$  ne dépend que de  $d$  et  $\varepsilon$ .*

Pour une démonstration de ce résultat, nous renvoyons le lecteur à [1], lemma 1. Si  $\xi = (\xi_p) \in \mathbf{A}$ , posons

$$\{\xi\} = -\xi_0 + \sum_{p \in P} \langle \xi_p \rangle,$$

où le nombre rationnel  $\langle \xi_p \rangle$  est défini par la relation (2) du Chapitre I. On a

$$(25) \quad \sum_{p \in P} \langle \xi_p \rangle = \frac{a(\xi)}{Q(\xi)},$$

où l'entier  $Q(\xi)$  est défini comme d'habitude par la relation (12) du Chapitre I, et où les entiers  $a(\xi)$  et  $Q(\xi)$  sont premiers entre eux. De plus

$$(26) \quad f(\xi) = \sum_{|x| < R} \chi(x^d \xi) = \sum_{|x| < R} \exp(2i\pi x^d \{\xi\}).$$

Supposons maintenant que l'image  $\pi(\xi)$  de  $\xi$  dans  $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$  soit dans  $\overline{m}$ ; puisque la fonction  $f$  est invariante sous  $\mathbf{Q}$ , le lemme 2.6. permet de supposer que l'on a

$$(27) \quad |\xi|_0 Q(\xi) < R^{-d+\delta} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leq R^{d-\delta}.$$

Mais la relation (25) implique

$$|\{\xi\} - \frac{a(\xi)}{Q(\xi)}| = |\xi|_0;$$

on déduit donc des deux relations précédentes que

$$|\{\xi\} - \frac{a(\xi)}{Q(\xi)}| \leq \frac{1}{Q(\xi) R^{d-\delta}} \leq \frac{1}{Q(\xi)^2},$$

et on peut appliquer le lemme 2.7. de Weyl avec  $K(x) = x^d \{\xi\}$ ; le membre de gauche de la relation (24) n'est autre que l'expression (26) de  $f(\xi)$ ; si nous examinons le membre de droite de la relation (24) avec les valeurs qui lui sont données maintenant, on voit que

$$R^d/Q(\xi) \gg R^\delta$$

par la relation (27); et on a aussi

$$Q(\xi) > R^\delta;$$

en effet la relation (27) implique que  $|\xi|_0 < R^{-d+\delta}$ ; si on avait en outre  $Q(\xi) \leq R^\delta$  alors  $\pi(\xi)$  serait dans  $M$  ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc finalement, si  $\delta < 1$ ,

$$(27.1) \quad f(\xi) \ll R^{1+\varepsilon-(\delta/D)}.$$

Le troisième résultat que nous allons utiliser est l'*inégalité de Hua*:

LEMME. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$(27.2) \quad \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^{2D} d\xi \ll R^{2D-d+\varepsilon}.$$

*Démonstration.* Soit  $\hat{\mathbf{Z}}$  l'ensemble produit de tous les  $\mathbf{Z}_p$ , pour  $p \in P$ . L'ensemble

$$D^+ = ]0, 1[ \times \hat{\mathbf{Z}}$$

est un domaine fondamental de  $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$  dans  $\mathbf{A}$ , autrement dit la restriction de la projection  $\pi$  à  $D^+$  est injective et pour toute fonction  $g$  continue sur  $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ , on a

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} g(\xi) d\xi = \int_0^1 \int_{\hat{\mathbf{Z}}} g(\xi_0, \xi_f) d\xi_0 d\xi_f.$$



Si  $\xi \in D^+$ , et si  $x \in \mathbf{Z}$ , on a

$$\chi(x^d \xi) = \chi_0(x^d \xi_0),$$

ce qui implique

$$f(\xi) = f_0(\xi_0),$$

où on a posé, pour  $\xi_0 \in \mathbf{R}$ ,

$$f_0(\xi_0) = \sum_{|x| \leq R} \chi_0(x^d \xi_0).$$

On a donc

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^{2D} d\xi = \int_0^1 |f_0(\xi_0)|^{2D} d\xi_0,$$

et pour prouver (27.2) il suffit de montrer que l'intégrale du membre de droite de la relation précédente est majorée par  $R^{2D-d+\varepsilon}$ , ce qui est l'inégalité de Hua comme énoncée et démontrée dans [1], lemma 2.

Pour démontrer le théorème 2.5., il suffit de remarquer que

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^n d\xi \leq \sup_{\xi \in \mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^{n-2D} \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^{2D} d\xi;$$

en utilisant (27.1) et (27.2), on voit que le membre de droite de cette expression est majoré par  $R^T$ , avec

$$T = (n-2D)(1 + \varepsilon - (\delta/D)) + 2D - d + \varepsilon;$$

on a donc

$$T = n - d - \theta_1,$$

avec

$$\theta_1 = (\delta/D)(n-2D) - \varepsilon(n-2D-1),$$

donc  $\theta_1$  est positif dès que  $n > 2D$ , ce qui établit le théorème 2.5.

Posons maintenant  $g(\xi)^n = G(\xi)$ , conformément à la relation (17).

**THÉORÈME 2.8.** *Lorsque  $t$  tend vers l'infini et si  $n > 2d$ , on a*

$$\int_{\mathbf{A}-M} |G(\xi)| d\xi \ll R^{n-d-\theta_2},$$

avec  $\theta_2 > 0$ .

*Démonstration.* Si  $\xi \in \mathbf{A} - M$ , on a

$$|\xi_0| > R^{-d+\delta} \quad \text{ou} \quad Q(\xi) > R^\delta;$$

On a donc

$$(28) \quad \int_{\mathbf{A}-M} G(\xi) d\xi \leq I_0(R) J_f + I_f(R) J_0(R),$$

avec

$$I_0(R) = \int_{|\xi_0| > R^{-d+\delta}} |G_0(\xi_0)| d\xi_0,$$

$$J_f = \int_{\mathbf{A}_f} |G_f(\xi_f)| d\xi_f,$$

$$I_f(R) = \int_{Q(\xi) > R^\delta} |G(\xi_f)| d\xi_f,$$

et

$$J_0(R) = \int_{\mathbf{R}} |G_0(\xi_0)| d\xi_0.$$

Rappelons que la fonction  $G_0$  dépend de  $R$  puisqu'elle dépend de  $\phi_0$ ; les relations (7) et (9) montrent que  $\phi_0(\xi_0) \leq 1$ , et que l'on a

$$\phi_0(0) \ll R^n.$$

La proposition 1.10. montre que l'on a

$$(29) \quad |G_0(\xi_0)| \ll \text{Max}(R^{-d}, |\xi|)^{-(n/d)}$$

et il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |G_0(\xi_0)| d\xi_0 &\ll \int_{|\xi| < R^{-d}} R^n d\xi + \int_{|\xi| > R^{-d}} |\xi|^{-(n/d)} d\xi \\ &\ll R^{n-d} + (R^{-d})^{1-(n/d)} \\ &\ll R^{n-d}. \end{aligned}$$

D'autre part, la proposition 1.8. implique l'inégalité

$$I_f(R) \ll \int_{Q(\xi) > R} Q(\xi)^{-(n/d)} d\xi_f;$$

si nous écrivons  $n/d = c + \varepsilon$  avec  $c > 2$  et  $\varepsilon > 0$ , il vient

$$I_f(R) \ll R^{-\varepsilon\delta} \int_{\mathbf{A}_f} Q(\xi)^{-c} d\xi_f$$

et la relation (13) du chapitre I montre que l'intégrale figurant dans le membre de droite converge; on a donc

$$(30) \quad I_f(R) J_0(R) \ll R^{n-d-\varepsilon\delta}.$$

D'autre part, et en faisant usage de la relation (29), il vient

$$I_0(R) \ll \int_{|\xi|_0 > R-d+\delta} |\xi|_0^{-(n/d)} d\xi,$$

et donc

$$(31) \quad I_0(R) \ll R^{(d-\delta)((n/d)-1)} = R^{n-d-\varepsilon'}$$

avec  $\varepsilon' > 0$ ; et puisque, toujours par la proposition 1.8., l'intégrale  $J_f$  est convergente, les relations (28), (30) et (31) établissent l'estimation énoncée dans le théorème 2.8.

THÉORÈME 2.9. Pour tout  $\xi \in M$ , on a

$$f(\xi) - g(\xi) \ll Q(\xi) R^\delta.$$

Démonstration. Posons

$$h(x, \xi) = \varphi(x) \chi(x^d \xi),$$

où  $\varphi$  est définie par la relation (8), de telle sorte que

$$f(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}} h(x, \xi)$$

et

$$g(\xi) = \int_{\mathbf{A}} h(x, \xi) dx.$$

Posons aussi

$$\hat{h}(y, \xi) = \int_{\mathbf{A}} h(x, \xi) \chi(xy) dx.$$

Alors on peut appliquer à la fonction  $h_\xi(x) = h(x, \xi)$  la formule de Poisson, et il vient

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sum_{x \in \mathbf{Q}} h(x, \xi) \\ &= \sum_{y \in \mathbf{Q}} \hat{h}(y, \xi), \end{aligned}$$

et donc

$$(32) \quad f(\xi) = g(\xi) + \sum_{y \neq 0} \hat{h}(y, \xi).$$

Si  $\xi \in \mathbf{A}$  posons  $q_p(\xi) = \text{Max}(1, |\xi|_p)$ .

Les fonctions  $h$  et  $\hat{h}$  sont décomposables; nous noterons  $h_p$  (resp  $\hat{h}_p$ ) leurs facteurs locaux.

LEMME 2.10. *La fonction  $y \rightarrow \hat{h}_p(y, \xi)$ , définie sur  $\mathbf{Q}_p$ , est constante modulo  $\mathbf{Z}_p$  et à support dans  $q_p(\xi)^{-1} \mathbf{Z}_p$ .*

*Démonstration.* Posons  $q_p(\xi) = q$ . Puisque  $q \geq 1$ , si  $|x_1 - x_2| \leq q^{-1}$ , alors  $x_1$  et  $x_2$  sont tous deux dans  $\mathbf{Z}_p$  ou tous deux en dehors, et on a

$$\varphi_p(x_1) = \varphi_p(x_2).$$

Si  $x_1$  et  $x_2$  ne sont pas dans  $\mathbf{Z}_p$ , on a

$$g_p(x_1, \xi) = g_p(x_2, \xi) = 0.$$

Si  $x_1$  et  $x_2$  sont dans  $\mathbf{Z}_p$ , on a

$$|x_1^d - x_2^d|_p \leq |x_1 - x_2|_p,$$

et donc

$$|x_1^d \xi - x_2^d \xi|_p \leq |x_1 - x_2|_p |\xi|_p;$$

si

$$|x_1 - x_2| \leq q^{-1},$$

on a donc

$$|x_1^d \xi - x_2^d \xi|_p \leq 1,$$

et il s'ensuit que  $\chi_p(x_1^d \xi) = \chi_p(x_2^d \xi)$  et par conséquent  $h_p(x_1, \xi) = h_p(x_2, \xi)$ . La fonction  $x \rightarrow h_p(x, \xi)$  est donc constante modulo  $q \mathbf{Z}_p$  et à support dans  $\mathbf{Z}_p$ ; le lemme s'ensuit immédiatement par dualité.

LEMME 2.11. *Si  $u \in S(\mathbf{R})$ , on pose*

$$(33) \quad \|u\|_1^2 = \int_0^1 \left| \sum_{x \in \mathbf{Z}} u(x+t) \right|^2 dt.$$

Alors

$$(34) \quad \sum_{y \neq 0} |\hat{u}(y)| \leq (1/2\sqrt{3}) \|u'\|_1.$$

*Démonstration.* En appliquant l'égalité de Parseval-Bessel à la fonction périodique

$$u^*(t) = \sum_{x \in \mathbf{Z}} u(x+t),$$

on obtient

$$\sum_{y \in \mathbf{Z}} |\hat{u}(y)|^2 = \int_0^1 |u^*(t)|^2 dt = \|u\|_1^2,$$

et en remplaçant  $u$  par sa dérivée  $u'$ , il vient

$$4\pi^2 \sum_{y \neq 0} |y\hat{u}(y)|^2 = \|u'\|_1^2.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux suites  $|y\hat{u}(y)|$  et  $|1/y|$ , où  $y$  parcourt  $\mathbf{Z} - \{0\}$ , on en déduit

$$\left[ \sum_{y \neq 0} |\hat{u}(y)| \right]^2 \leq (\pi^2/3) (1/4\pi^2) \|u'\|_1^2,$$

d'où le lemme 2.11.

LEMME 2.12. Avec les notations précédentes, si  $0 < a < R$  et  $\xi_0 \in \mathbf{R}$  on a

$$\sum_{y \neq 0} \hat{h}_0(y/a, \xi_0) \ll aR^d |\xi_0|.$$

*Démonstration.* Nous allons tout d'abord établir le résultat suivant. Soit  $u \in C_c(\mathbf{R})$ ; on suppose que  $\text{Supp } u \subset [-R, +R]$  et on pose  $M(u') = \sup_{\mathbf{R}} |u'(x)|$ . Alors

$$(35) \quad (1/a) \sum_{y \neq 0} |\hat{u}(y/a)| \leq (1/\sqrt{3}) R M(u').$$

En effet appliquons le lemme 2.11 à la fonction  $v(t) = u(at)$ ; puisque  $\hat{v}(y) = (1/a) \hat{u}(y/a)$  on a

$$(1/a) \sum_{y \neq 0} |\hat{u}(y/a)| \leq (1/2\sqrt{3}) \|v'\|_1.$$

Mais puisque  $u(x) = 0$  si  $|x| > R$ , la fonction  $v'(x+t) = au'(ax+at)$  est nulle si  $|x| > (R/a) + 1$ , donc a fortiori si  $|x| > 2R/a$  et

$$\sum |v'(x+t)| \leq \sum_{|x| \leq 2R/a} aM(u') = 2RM(u'),$$

d'où  $\|v'\|_1 \leq 2RM(u')$  et la relation (35).

Ceci dit, on a

$$(d/dx) h(x, \xi_0) = \chi_0(x^d \xi_0) (\varphi'_0(x) + 2i\pi dx^{d-1} \xi_0 \varphi_0(x));$$

or on peut choisir  $\psi$  de telle sorte que  $0 \leq \psi(x) \leq 1$ , et alors

$$\varphi_0(x) = \psi * \chi_R(x)$$

vérifie aussi  $0 \leq \varphi_0(x) \leq 1$ ; et puisque

$$\varphi'_0(x) = \psi(x+R) - \psi(x-R),$$

on a  $|\varphi'_0(x)| \leq 2$ . En tenant compte du fait que

$$\varphi_0(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > R + (1/3),$$

il vient donc finalement

$$(36) \quad M((d/dx) h_0(x, \xi_0)) \leq CR^{d-1} |\xi|_0,$$

où la constante  $C$  ne dépend ni de  $R$  ni de  $\xi_0$ . En appliquant à  $h_0(x, \xi_0)$  la relation (35) et compte tenu de (36), on obtient le résultat du lemme 2.12.

*Démonstration du théorème 2.9.* La relation (32) implique

$$|f(\xi) - g(\xi)| \leq \sum_{y \in \mathbf{Q}^*} |\hat{h}(y, \xi)|,$$

et le lemme 2.10 montre que la somme de droite ne porte en réalité que sur les  $y \in \mathbf{Q}^*$  tels que  $q_p(\xi)y \in \mathbf{Z}_p$  pour tout  $p \in P$ , donc tels que  $Q(\xi)y \in \mathbf{Z}$ ; par ailleurs, puisque

$$(37) \quad \hat{h}_p(y, \xi_p) = \int_{\mathbf{Z}_p} \chi_p(x^d \xi + xy) dx,$$

on a  $|\hat{h}_p(y, \xi_p)| \leq 1$  et donc

$$|\hat{h}(y, \xi)| \leq |\hat{h}_0(y, \xi_0)|;$$

il s'ensuit

$$|f(\xi) - g(\xi)| \leq \sum_{y \in \mathbf{Z} - \{0\}} \hat{h}_0(y/Q(\xi), \xi_0);$$

utilisant le lemme 2.12 pour majorer le membre de droite, il vient

$$f(\xi) - g(\xi) \ll R^d |\xi_0| Q(\xi),$$

et comme  $|\xi_0| \leq R^{-d+\delta}$  si  $\xi \in M$ , le théorème 2.9 est démontré.

**THÉORÈME 2.13.** Si  $\delta < d/(2d+1)$ , et si  $n \geq 4d$ , on a

$$\int_M f(\xi)^n \chi(-t\xi) d\xi = \int_M g(\xi)^n \chi(-t\xi) d\xi + O(R^{n-d-\theta_3}),$$

avec  $\theta_3 > 0$ .

*Démonstration.* La proposition 1.6 montre que

$$g_f(\xi) \ll Q(\xi)^{-1/d};$$

par ailleurs

$$g_0(\xi_0) \ll R;$$

on a donc

$$(38) \quad g(\xi) \ll R Q(\xi)^{-1/d}.$$

Remarquons maintenant que si  $\delta < d/(2d+1)$  et  $\xi \in M$ , on a

$$(39) \quad R^\delta Q(\xi) \leq R Q(\xi)^{-1/d};$$

en effet la relation  $Q(\xi) < R^\delta$  implique, puisque  $\delta(1 + (1/d)) < 1 - \delta$ ,

$$Q(\xi)^{1+(1/d)} \leq R^{1-\delta}.$$

Posons

$$K(\xi) = f(\xi)^n - g(\xi)^n;$$

si  $\xi \in M$  on a l'inégalité

$$(40) \quad K(\xi) \ll R^{n-1+\delta} Q(\xi)^{-\nu}$$

avec  $\nu > 2$ , comme on va le voir. Si on pose

$$k(\xi) = f(\xi) - g(\xi),$$

il vient, par la formule du binôme,

$$K(\xi) \ll \text{Max}(|k(\xi)^p g(\xi)^{n-p}|) \quad (1 \leq p \leq n),$$

mais le théorème 2.9. affirme que

$$k(\xi) \ll R^\delta Q(\xi);$$

les inégalités (38) et (39) montrent donc que l'on a

$$k(\xi)^p g(\xi)^{n-p} \ll R^{n-1+\delta} Q(\xi)^{1-((n-1)/d)};$$

or si  $n \geq 3d + 2$ , on a

$$1 - ((n-1)/d) < -2,$$

ce qui établit (40) puisque  $3d + 2 \leq 4d$  dès que  $d \geq 2$ .

Pour démontrer le théorème 2.13. il suffit donc d'estimer l'intégrale de  $K$  sur  $M$ ; mais la relation (40) et la définition de  $M$  impliquent

$$\int_M K(\xi) d\xi \ll \int_{|\xi_0| < R^{-d+\delta}} R^{n-1+\delta} \int_{Q(\xi) < R^\delta} Q(\xi)^{-\nu} d\xi_f;$$

puisque  $\nu > 2$ , l'intégrale

$$\int_{\mathbf{A}_f} Q(\xi)^{-\nu} d\xi_f$$

est convergente et on a donc

$$\int_M K(\xi) d\xi \ll R^{n-d+1-2\delta}$$

ce qui établit le théorème 2.13. avec  $\theta_3 = 1 - 2\delta$ .

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.1. Rappelons que l'on a posé  $D = 2^{d-1}$ . Supposons donc  $n > 2D$ , et dans la définition (19) de l'ensemble majeur, choisissons  $\delta$  tel que

$$\delta < d/(2d+1).$$

D'autre part soit  $\theta$  un nombre « suffisamment petit ». La proposition 2.2. affirme que

$$N(t) = \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} f(\xi)^n \chi(-t\xi) d\xi;$$

nous avons vu dans le théorème 2.5. que lorsque  $n > 2D$ , on a

$$\int_m |f(\xi)|^n d\xi \ll R^{n-d-\theta}$$

et dans le théorème 2.13., que si  $n > 4d$ ,

$$\int_{\bar{M}} f(\xi)^n \chi(-t\xi) d\xi = \int_M g(\xi)^n \chi(-t\xi) d\xi + o(R^{n-d-\theta}).$$

Les trois relations précédentes impliquent donc que l'on a

$$N(t) = \int_M g(\xi)^n \chi(-t\xi) d\xi + o(R^{n-d-\theta}).$$

Rappelons que  $g(\xi)^n = G(\xi)$  et que si  $n > 2d$ , et  $d \geq 3$ , on a

$$\int_{\mathbf{A}-M} |G(\xi)| d\xi \ll R^{n-d-\theta}$$

par le théorème 2.8., et

$$S_{\mathbf{A}}(t) = \int_{\mathbf{A}} G(\xi) \chi(-t\xi) d\xi$$



par la proposition 2.3. Puisque  $R^d \sim t$ , on tire des trois relations précédentes que sous les hypothèses faites (et en changeant  $\theta$  en  $\theta/d$ ), on a

$$N(t) = S_A(t) + O(t^{(n/d)-1-\theta})$$

qui n'est autre que la relation (3) et le théorème 2.1. est établi.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] DAVENPORT, H. *Analytic methods for diophantine equations and approximations*. Campus Publishers, Ann Arbor, 1962.
- [2] DELIGNE, P. La conjecture de Weil I. *Publ. Math. I.H.E.S.* 43 (1974), 273-307.
- [3] ELLISON, W. J. Waring's Problem. *Amer. Math. Monthly* 78 (1971), 10-36.
- [4] HARDY, G. H. and J. E. LITTLEWOOD. Some problems of "Partitio Numerorum", I, II, IV, VI. In the *Collected Works of G. H. Hardy, vol. 1*, 405-505, Oxford, Oxford University Press, 1966.
- [5] IGUSA, J. I. On a certain Poisson Formula. *Nagoya Math. J.* 53 (1974), 211-233.
- [6] ———. *Lectures on forms of higher Degree*. Tata Institute of Fundamental Research Lectures No. 59, Berlin, Springer 1978.
- [7] ONO, T. Gauss Transforms and Zeta Functions. *Ann. of Math.* 91 (1970), 332-361.
- [8] SERRE, J. P. Majorations de Sommes exponentielles. *Journées Arithmétiques de Caen, Astérisque 41-42* (1977), 111-126
- [9] WEIL, A. Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques. *Acta Math.* 113 (1965), 1-87; In: *Œuvres Scientifiques, vol. III*, Berlin, Springer 1979.
- [10] MARS, J. G. M. Sur l'approximation du nombre de solutions de certaines équations diophantiennes. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (4)*, 6 (1973), 357-388.
- [11] LACHAUD, G. An adelic proof of the Hardy-Littlewood theorem on Waring's problem. *Journées Arithmétiques in Exeter*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1982.
- [12] VAUGHAN, R. C. *The Hardy-Littlewood method*. Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1981.

(Reçu le 13 mars 1981, révisé le 5 mars 1982)

Gilles Lachaud

Université de Nice  
7, Avenue Bieckert  
F-06000 Nice