

SUR UNE INÉGALITÉ DE MONTGOMERY-VAUGHAN

Autor(en): **Preissmann, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-53823>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR UNE INÉGALITÉ DE MONTGOMERY-VAUGHAN

par E. PREISSMANN

LES INÉGALITÉS DE GRAND CRIBLE ET LEURS APPLICATIONS

Le grand crible est une idée relativement récente, permettant par exemple de démontrer le théorème de Bombieri-Vinogradov [2] ou de montrer que pour n assez grand on a $2n = p + P_k$ (p étant premier et P_k produit de k facteurs premiers au plus). Barban [1] a trouvé $k = 4$, et Chen (voir [3]) $k = 2$.

Notons $e(\theta) = e^{2i\pi\theta}$ et soient $a_{M+1}, a_{M+2}, \dots, a_{M+N}$ des nombres complexes arbitraires. Posons

$$S(\alpha) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha).$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_R$ des nombres réels distincts modulo 1 et posons

$$\delta = \text{Min}_{\substack{r, s, n \in \mathbf{Z} \\ r \neq s}} |\alpha_r - \alpha_s - n|.$$

Une inégalité de grand crible est du type

$$(A) \quad \sum_r |S(\alpha_r)|^2 \leq C(N, \delta) \sum_n |a_n|^2$$

(vérifiée pour (a_n) et (α_r) arbitraires).

Si $R = 1$, on trouve $|S(\alpha_1)|^2 \leq N \cdot \sum |a_n|^2$ (inégalité de Schwarz) et si $N = 1$, $\sum_r |S(\alpha_r)|^2 = R \cdot |a_{M+1}|^2 \leq \delta^{-1} |a_{M+1}|^2$.

On a trouvé diverses expressions de $C(N, \delta)$ [4] mais il est surprenant qu'on ait pu réunir les deux inégalités précédentes et montrer que $C(N, \delta) = N + \delta^{-1} - 1$ satisfait (A) [5]. Cette expression est la meilleure possible au sens suivant: pour R donné, on peut toujours obtenir l'égalité dans (A) [5]. On peut obtenir une forme un peu plus sophistiquée que (1):

Si $\delta_r = \text{Min}_{s \neq r, n \in \mathbf{Z}} |\alpha_r - \alpha_s - n|$, alors Montgomery-Vaughan [6] [7] ont montré que

$$(B) \quad \sum_{r=1}^R |S(\alpha_r)|^2 (N + C\delta_r^{-1})^{-1} \leq \Sigma |a_n|^2$$

avec $C = \frac{3}{2}$, inégalité dont ils donnent des applications arithmétiques.

LES INÉGALITÉS DE HILBERT-MONTGOMERY-VAUGHAN

L'inégalité (A) équivaut à dire que la norme de la matrice $R \times N$ ($e(n\alpha_r)$) est inférieure ou égale à $\sqrt{C(N, \delta)}$. La matrice transposée ayant la même norme, on est conduit [6] à s'intéresser à la majoration de la norme d'une matrice du type $(\sin^{-1}\pi(\alpha_r - \alpha_s))'$ (le prime signifiant que les termes de la grande diagonale sont nuls). Cette majoration se ramène à celle de la norme d'une matrice du type $((x_r - x_s)^{-1})'$ [5]. C'est pourquoi Montgomery et Vaughan [7] ont démontré:

Soit x_1, x_2, \dots, x_r des nombres réels distincts,

$$\delta = \underset{\substack{r, s \\ r \neq s}}{\text{Min}} |x_r - x_s|, \quad \delta_r = \underset{s \neq r}{\text{Min}} |x_r - x_s|$$

alors quels que soient les nombres complexes u_1, u_2, \dots, u_R

$$(C) \quad \left| \sum_{\substack{r, s \\ r \neq s}} \frac{\bar{u}_r u_s}{x_r - x_s} \right| \leq \pi \delta^{-1} \Sigma |u_r|,$$

$$(D) \quad \left| \sum_{\substack{r, s \\ r \neq s}} \frac{\bar{u}_r u_s}{x_r - x_s} \right| \leq \pi C \cdot \Sigma |u_r|^2 \delta_r^{-1},$$

avec $C = \frac{3}{2}$.

De (C) on déduit (A) avec $C(N, \delta) = N + \delta^{-1}$, et de (D) on déduit (B). Une conjecture vraisemblable est qu'on peut donner à C la valeur 1 dans (D). Dans ce sens, j'ai montré le résultat suivant:

THÉORÈME. (D) reste vraie pour $C = \frac{4}{3}$.

Notation: Tout au long de la démonstration $\delta_r = \underset{s \neq r}{\text{Min}} |x_r - x_s|$.

LEMME 1. Soit $(x_r)_0^\infty$ une suite réelle strictement croissante telle que $x_0 = 0$; f une fonction de $]0, +\infty[$ dans \mathbf{R} , intégrable à l'infini, trois fois dérivable et vérifiant $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, $f'''(x) < 0$ pour tout x . Alors

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) \delta_k$$

considéré comme fonction de $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ est maximum pour $x_k = kx_1$ pour tout k .

D'après les conditions précédentes, il est clair que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ et que f et $-f'$ sont des fonctions convexes. Notons

$$a_k = x_k - \frac{1}{2} \delta_k \quad \text{et} \quad b_k = x_k + \frac{1}{2} \delta_k.$$

On a donc

$$(1) \quad \delta_k f(x_k) < \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx \quad \text{pour tout } k.$$

D'après la définition de δ_k on sait que les intervalles $]a_k, b_k[$ sont disjoints, et donc

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) \delta_k < \int_{a_1}^{+\infty} f(x) dx,$$

d'où la convergence de la série définissant T .

(a) Supposons qu'on ait une suite telle que

$$x_1 \leq x_2 - x_1 \leq x_3 - x_2 \dots \leq x_n - x_{n-1} \quad \text{et} \quad x_n - x_{n-1} > x_{n+1} - x_n.$$

Alors:

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} + \lambda, x_{n+2} + \lambda, x_{n+3} + \lambda, \dots) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \delta_k f(x_k) + (x_{n+1} + \lambda - x_n) f(x_n) + \sum_{n+2}^{\infty} \delta_k f(x_k + \lambda) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{n+1}(\lambda) f(x_{n+1} + \lambda) \right] \\ &= f(x_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k f'(x_k) + \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} (\delta_{n+1}(\lambda)), \end{aligned}$$

où $\delta_{n+1}(\lambda) = \text{Inf}[(x_{n+1} - x_n + \lambda), (x_{n+2} - x_{n+1})]$.

Comme $-f'$ est convexe, on trouve de manière similaire à (2):

$$- \sum_{k=n+1}^{\infty} f'(x_k) \delta_k < - \int_{a_{n+1}}^{\infty} f'(x) dx \quad \text{d'où} \quad D > f(x_n) - f(a_{n+1}) > 0.$$

C'est pourquoi (en notant $h = [(x_n - x_{n-1}) - (x_{n+1} - x_n)]$) on a

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) < T(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} + h, x_{n+2} + h, \dots).$$

(b) Supposons maintenant qu'on ait une suite telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+3} - x_{n+2} = \dots \quad \text{et} \quad x_n - x_{n-1} < a.$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} - \lambda, x_{n+2} - \lambda, \dots) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} \left[\sum_{k=1}^n f(x_k) \delta_k + (a - \lambda) f(x_{n+1} - \lambda) + \sum_{k=n+2}^{\infty} f(x_k - \lambda) \delta_k \right] \\ &= -f(x_{n+1}) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k f'(x_k) > -f(x_{n+1}) - \int_{x_{n+1}}^{+\infty} f'(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Notons $h = a - (x_n - x_{n-1})$; on a donc

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) < T(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} - h, x_{n+2} - h, \dots),$$

et en répétant indéfiniment ce décalage on trouve (en notant $k = x_n - x_{n-1}$)

$$T(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots) < T(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1} + k, x_{n-1} + 2k, \dots).$$

(c) M étant la borne supérieure de $T(x_1, \dots, x_n, \dots)$, on peut supposer $T(x_1, \dots, x_n, \dots) > M - \varepsilon$ et par une application répétée de a) on sait que pour tout m on peut trouver une suite (y_n) telle que

$$x_1 = y_1 \leq y_2 - y_1 \leq \dots \leq y_{m+1} - y_m \quad \text{et} \quad T(y_1, \dots, y_n, \dots) > T(x_1, \dots, x_n, \dots).$$

D'autre part

$$R_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} f(y_k) \delta_k < \int_{a_{m+1}}^{\infty} f(x) dx$$

est plus petit que ε pour m assez grand, donc (en notant $l = (y_{m+1} - y_m)$)

$$T(x_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1} + l, y_{m+1} + 2l, \dots) > M - \varepsilon - R_m > M - 2\varepsilon,$$

et en appliquant b) de manière répétée on trouve

$$T(x_1, 2x_1, 3x_1, \dots, kx_1, \dots) > M - 2\varepsilon$$

pour tout ε , d'où le lemme.

Conséquences: on a donc

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{x_k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_1}{k^2 x_1^2} = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{\pi^2}{6},$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{x_k^4} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_1}{k^4 x_1^4} = \frac{1}{x_1^3} \cdot \frac{\pi^4}{90},$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{x_k^2(x_k+a)^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_1}{(kx_1)^2(kx_1+a)^2}, \quad a > 0,$$

$$\text{avec } f(x) = \frac{1}{x^2}; \quad \frac{1}{x^4}; \quad \frac{1}{x^2(x+a)^2}.$$

LEMME 2. Soit $(x_n)_{n=0}^N$ une suite réelle strictement croissante, $x_0 = 0$, telle que $(x_1$ et x_N étant fixés)

$$T(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N) = \sum_{k=1}^N \frac{\delta_k}{x_k}$$

soit maximum pour x_2, x_3, \dots, x_{N-1} variables. Alors la suite $x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_N - x_{N-1}$ est monotone.

(a) Supposons que la suite est telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1} = \dots = x_{n+k} - x_{n+k-1}, \\ x_n - x_{n-1} > a, \quad x_{n+k+1} - x_{n+k} > a.$$

Alors

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} T(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1} + \lambda, \dots, x_{n+l} + l\lambda, x_{n+k} + k\lambda, x_{n+k+1}, \dots, x_N) \\ = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} \left[\sum_{r=1}^{n-1} \frac{\delta_r}{x_r} + \sum_{l=0}^k \frac{a + \lambda}{x_{n+l} + l\lambda} + \frac{\delta_{n+k+1}(\lambda)}{x_{n+k+1}} + \sum_{m=n+k+2}^N \frac{\delta_m}{x_m} \right].$$

Si on remarque que $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} \delta_{n+k+1}(\lambda) = 0$ ou $-k$ et que

$$\frac{a + \lambda}{x_{n+l} + l\lambda} = \frac{1}{l} \frac{x_{n+l} - x_n + l\lambda}{x_{n+l} + l\lambda},$$

on trouve

$$D \geq \sum_{l=0}^k \frac{x_n}{x_{n+l}^2} - \frac{k}{x_{n+k+1}} > x_n \sum_{l=0}^k \frac{1}{x_{n+l}^2} - \frac{x_n}{a} \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+k}} \right), \\ D > \frac{x_n}{a} \left(a \sum \frac{1}{x_{n+l}^2} - \int_{x_n}^{x_{n+k}} \frac{dx}{x^2} \right) > 0.$$

Donc la fonction T n'est pas maximisée par cette suite.

(b) Supposons maintenant que la suite est telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1} = \dots = x_{n+k} - x_{n+k-1},$$

$$a > x_n - x_{n-1}, \quad a > x_{n+k+1} - x_{n+k}.$$

Alors

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} T(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} - \lambda, x_{n+2} - \lambda, \dots, x_{n+k} - \lambda, x_{n+k+1}, \dots, x_N),$$

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} \left[\sum_{m=1}^n \frac{\delta_m}{x_m} + \frac{a - \lambda}{x_{n+1} - \lambda} + \frac{a}{x_{n+2} - \lambda} + \dots + \frac{a}{x_{n+k-1} - \lambda} \right. \\ \left. + \frac{x_{n+k+1} - x_{n+k} + \lambda}{x_{n+k} - \lambda} + \frac{\delta_{n+k+1}}{x_{n+k+1}} + \sum_{m=n+k+2}^N \frac{\delta_m}{x_m} \right],$$

En tenant compte du fait que $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} \delta_{n+k+1}(\lambda) = 0$ ou 1 et en utilisant la méthode des trapèzes on trouve

$$D \geq \frac{-x_n}{x_{n+1}^2} + \frac{a}{x_{n+2}^2} + \dots + \frac{a}{x_{n+k-1}^2} + \frac{x_{n+k+1}}{x_{n+k}^2},$$

$$D > -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{2} \frac{a}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{2} \frac{a}{x_{n+1}^2} + \frac{a}{x_{n+2}^2} + \dots + \frac{a}{x_{n+k-1}^2} + \frac{1}{2} \frac{a}{x_{n+k}^2} - \frac{1}{2} \frac{a}{x_{n+k}^2} + \frac{1}{x_{n+k+1}},$$

$$D > -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{2} \frac{a}{x_{n+1}^2} + \int_{x_{n+1}}^{x_{n+k}} \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{2} \frac{a}{x_{n+k}^2} + \frac{1}{x_{n+k}},$$

$$D > -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{2} \frac{a}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{2} \frac{a}{x_{n+k}^2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}^2} - \frac{a}{2x_{n+1}^2} - \frac{a}{2x_{n+k}^2},$$

$$D > \frac{a}{2x_{n+1}^2} - \frac{a}{2x_{n+k}^2} \geq 0,$$

Donc la suite ne maximisait pas la fonction T .

De a) et b) on déduit que la suite maximisante est telle que

$$x_1, (x_2 - x_1), \dots, (x_n - x_{n-1}), \dots, (x_N - x_{N-1})$$

est monotone.

LEMME 3. Soit $(x_n)_0^N$ une suite réelle strictement croissante telle que $x_0 = 0$ et que $(x_1$ et x_N étant fixés)

$$T(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) = \sum_{k=1}^N \frac{\delta_k}{x_k}$$

est maximum (x_2, x_3, \dots, x_{N-1} étant les variables). Si la suite

$$x_1, (x_2 - x_1), (x_3 - x_2), \dots, (x_N - x_{N-1})$$

est décroissante, alors il existe un k tel que

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 - x_1 = \dots = x_k - x_{k-1} &\geq x_{k+1} - x_k \geq x_{k+2} - x_{k+1} = \dots \\ &= x_N - x_{N-1}. \end{aligned}$$

a) Supposons que la suite soit telle que

$$x_{n-1} - x_{n-2} > x_n - x_{n-1} \geq x_{n+1} - x_n > x_{n+2} - x_{n+1}.$$

Alors

$$D = \frac{\partial}{\partial x_n} T(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots, x_N) \quad (\text{dérivée à droite}),$$

$$D = \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \right] = \frac{x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1}}{x_n^2 x_{n-1}}.$$

$$D \geq \frac{x_n^2 - x_{n-1}(x_n + (x_n - x_{n-1}))}{x_n^2 x_{n-1}} = \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_n^2 x_{n-1}} > 0.$$

donc la suite ne maximise pas la fonction T .

b) Supposons que la suite soit telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1} = \dots = x_{n+k} - x_{n+k-1} \quad (k \geq 2),$$

$$a > x_{n+k+1} - x_{n+k}, \quad a < x_n - x_{n-1}.$$

Alors

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} + (k-1)\lambda, \dots, x_{n+k-2} + 2\lambda, x_{n+k-1} + \lambda, x_{n+k}, \dots, x_N),$$

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_{n+1} - x_n + (k-1)\lambda}{x_n} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{x_{n+l+1} - x_{n+l} - \lambda}{x_{n+l} + (k-l)\lambda} + \frac{x_{n+k+1} - x_{n+k}}{x_{n+k}} \right].$$

Notons $a_l = x_l - \frac{a}{2}$ $b_l = x_l + \frac{a}{2}$ et remarquons que

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} \left(\frac{x_{n+l+1} - x_{n+l} - \lambda}{x_{n+l} + (k-l)\lambda} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{1}{k-l} \frac{x_{n+k} - x_{n+l} - (k-l)\lambda}{x_{n+l} + (k-l)\lambda} \right] = - \frac{x_{n+k}}{x_{n+l}^2},$$

$$D = \frac{k-1}{x_n} - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{x_{n+k}}{x_{n+l}^2},$$

et que $\frac{a}{x_{n+l}^2} < \int_{a_{n+l}}^{b_{n+l}} \frac{dx}{x^2}$.

$$D > \frac{k-1}{x_n} - \frac{x_{n+k}}{a} \int_{a_{n+1}}^{b_{n+k-1}} \frac{dx}{x^2} = \frac{k-1}{x_n} - \frac{x_{n+k}}{a} \left[\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_{n+k}} \right],$$

$$D > \frac{k-1}{x_n} - \frac{x_{n+k}}{a} \left[\frac{(x_{n+k} - x_n - a)}{b_n a_{n+k}} \right] = (k-1) \left[\frac{1}{x_n} - \frac{x_{n+k}}{b_n a_{n+k}} \right],$$

$$D > \frac{k-1}{x_n b_n a_{n+k}} \cdot \left[b_n a_{n+k} - x_n x_{n+k} \right],$$

$$D > \frac{k-1}{x_n b_n a_{n+k}} \cdot \frac{a}{2} \left[x_{n+k} - x_n - \frac{a}{2} \right] > 0,$$

donc la suite ne maximise pas la fonction T .

De a) et b) on déduit que les inégalités strictes dans la suite

$$x_1 \leq x_2 - x_1 \leq x_3 - x_2 \dots \leq x_N - x_{N-1}$$

ne peuvent être que consécutives.

LEMME 4. Soit $(x_n)_0^N$ une suite réelle strictement croissante, $x_0 = 0$, et maximisant la fonction

$$T(x_1, \dots, x_N) = \sum_{k=1}^N \frac{\delta_k}{x_k},$$

(x_2, x_3, \dots, x_{N-1} étant les variables). Si

$$x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_N - x_{N-1}$$

est une suite croissante, alors il existe un nombre n tel que

$$x_1 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} < x_{n+1} - x_n < \dots < x_N - x_{N-1}.$$

a) Supposons que la suite soit telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = \dots = x_{n+k} - x_{n+k-1}, \quad (k \geq 2),$$

$$a > x_n - x_{n-1}, \quad a < x_{n+k+1} - x_{n+k}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 D &= \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}-\lambda, \dots, x_{n+k-1}-\lambda, x_{n+k}, \dots, x_N) \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_{n+1}-x_n-\lambda}{x_{n+1}-\lambda} + \frac{a}{x_{n+2}-\lambda} + \dots + \frac{a}{x_{n+k-1}-\lambda} + \frac{a+\lambda}{x_{n+k}} \right] \\
 &= -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} + \frac{a}{x_{n+2}^2} + \dots + \frac{a}{x_{n+k-1}^2} + \frac{1}{x_{n+k}}, \\
 D &> -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} + \int_{x_{n+2}}^{x_{n+k}} \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{x_{n+k}} = -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{a^2}{x_{n+1}^2 x_{n+2}} > 0.
 \end{aligned}$$

Donc cette suite ne peut maximiser T .

b) Supposons que la suite soit telle que

$$< x_2 - x_1 < \dots < x_k - x_{k-1} < x_{k+1} - x_k = x_{k+2} - x_{k+1} = \dots = x_N - x_{N-1} = a.$$

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}-(N-k-1)\lambda, x_{k+2}-(N-k-2)\lambda, \dots, x_{N-1}-\lambda, x_N) \\
 &\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_{k+1}-x_k-(N-k-1)\lambda}{x_{k+1}-(N-k-1)\lambda} + \frac{a+\lambda}{x_{k+2}-(N-k-2)\lambda} + \dots + \frac{a+\lambda}{x_{N-1}-\lambda} + \frac{a+\lambda}{x_N} \right],
 \end{aligned}$$

et comme

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{a+\lambda}{x_{k+l}-(N-k-l)\lambda} \right] = \frac{1}{N-k-l} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_N - x_{k+l} + (N-k-l)\lambda}{x_{k+l}-(N-k-2)\lambda} \right] = \frac{x_N}{x_{k+l}^2}.$$

on trouve

$$D = \frac{-x_k(N-k-1)}{x_{k+1}^2} + \frac{x_N}{x_{k+2}^2} + \dots + \frac{x_N}{x_{k+l}^2} + \dots + \frac{x_N}{x_N^2},$$

d'où (par utilisation de la formule des trapèzes)

$$\begin{aligned}
 D &> \frac{-x_k(N-k-1)}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{2} \frac{x_N}{x_{k+1}^2} + \frac{1}{2} \frac{x_N}{x_N^2} + \int_{x_{k+1}}^{x_N} \frac{dx}{x^2} \cdot \frac{x_N}{a}, \\
 D &> \frac{-x_k(N-k-1)}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{2} \frac{x_N}{x_{k+1}^2} + \frac{1}{2} \frac{x_N}{x_N^2} + \frac{x_N}{a} \left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_N} \right), \\
 D &> -\frac{1}{2} \frac{x_N}{x_{k+1}^2} + \frac{1}{2x_N} + \frac{x_N x_{k+1} - x_{k+1}^2 - x_k(x_N - x_{k+1})}{ax_{k+1}^2}, \\
 D &> -\frac{1}{2} \frac{x_N}{x_{k+1}^2} + \frac{1}{2x_N} + \frac{x_N a - ax_{k+1}}{ax_{k+1}^2},
 \end{aligned}$$

$$D > \frac{1}{2x_N} + \frac{-x_N + 2x_N - 2x_{k+1}}{2x_{k+1}^2},$$

$$D > \frac{x_{k+1}^2 + x_N^2 - 2x_{k+1}x_N}{2x_Nx_{k+1}^2} = \frac{(x_N - x_{k+1})^2}{2x_Nx_{k+1}^2} \geq 0.$$

donc la suite ne maximise pas T .

De a) et b) on déduit le lemme.

LEMME 5. Soit $(x_n)_0^N$ une suite réelle croissante, $x_0 = 0$, maximisant

$$T(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N) = \sum_{k=1}^N \frac{\delta_k}{x_k}$$

(x_2, \dots, x_{N-1} étant les variables).

Alors $T(x_1, \dots, x_N) \leq \sum_{m \leq \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m} + O\left(\frac{x_1}{x_N}\right)$.

D'après le lemme 2 on voit qu'il y a deux cas.

Premier cas: La suite $x_1, x_2 - x_1, \dots, x_N - x_{N-1}$ est décroissante. D'après le lemme 3, on a :

$$x_1 = x_2 - x_1 = \dots = x_k - x_{k-1} > x_{k+1} - x_k \geq x_{k+2} - x_{k+1}$$

$$= x_{k+3} - x_{k+2} \dots = x_N - x_{N-1} = a,$$

d'où

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1} + \lambda, x_{k+2} + \lambda, \dots, x_{N-1} + \lambda, x_N + \lambda)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_{k+1} - x_k + \lambda}{x_k} + \frac{a}{x_{k+1} + \lambda} + \dots + \frac{a}{x_N + \lambda} \right]$$

$$= \frac{1}{x_k} - a \left(\frac{1}{x_{k+1}^2} + \dots + \frac{1}{x_N^2} \right),$$

$$D > \frac{1}{x_k} - \int_{x_{k+1}-a}^{x_N} \frac{dx}{x^2} > \frac{1}{x_k} - \int_{x_k}^{x_N} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x_N} > 0.$$

Soit

$$y_{k+1} = x_{k+1} + (2x_k - x_{k+1} - x_{k-1})$$

$$y_{k+2} = x_{k+2} + (2x_k - x_{k+1} - x_{k-1})$$

$$\vdots$$

$$y_N = x_N + (2x_k - x_{k+1} - x_{k-1}).$$

Nous avons donc

$$T(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N) \leq T(x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_N).$$

Soit z_N le plus petit des multiples entiers de x_1 qui soit supérieur ou égal à y_N et définissons $z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_N$ par :

$$c = z_{k+2} - z_{k+1} = z_{k+3} - z_{k+2} = \dots = z_{N-1} - z_{N-2} = z_N - z_{N-1}$$

et $z_{k+1} = y_{k+1}$.

Remarquons qu'il est impossible d'avoir $c > x_1$ car on aurait alors

$$z_N > y_{k+1} + x_1(N-k-1) = Nx_1 \geq y_{k+1} + (N-k-1)a = y_N.$$

a) Supposons $c = x_1$.

$$z_N < y_N + x_1 = x_N + x_1 + 2x_k - x_{k+1} - x_{k-1} < x_N + 2x_1,$$

donc

$$(6) \quad T(x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_N) \leq \sum_{m \leq \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m} + 2 \left(\frac{x_1}{x_N} \right)$$

b) Supposons $c < x_1$.

Définissons $u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_{N-1}, u_N$ par

$$u_{k+1} = z_{k+1}, u_{N-1} = z_N, \quad u_{k+2} - u_{k+1} = u_{k+3} - u_{k+2}$$

$$= \dots = u_N - u_{N-1} = d.$$

Il existe alors un entier l tel que $lx_1 = z_N - (k+1)x_1 = z_N - z_{k+1}$, donc

$$(7) \quad c = \frac{lx_1}{N-k-1} \quad \text{et} \quad d = \frac{lx_1}{N-k-2}.$$

Comme $c < x_1$, on a donc $d \leq x_1$, alors

$$A = T(x_1, \dots, x_k, u_{k+1}, \dots, u_{N-1}) - T(x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_N)$$

$$= -\frac{d}{u_N} + \sum_{m=0}^{N-k-1} \left(\frac{d}{u_{m+k+1}} - \frac{c}{z_{m+k+1}} \right)$$

$$= -\frac{d}{u_N} + \sum_{m=0}^{N-k-1} \frac{d(z_{k+1} + mc) - c(u_{k+1} + md)}{u_{m+k+1}z_{m+k+1}}$$

$$= -\frac{d}{u_N} + \sum_{m=0}^{N-k-1} \frac{(d-c)u_{k+1}}{u_{m+k+1}z_{m+k+1}},$$

$$A > -\frac{d}{u_N} + \sum_{m=0}^{N-k-1} \frac{(d-c)u_{k+1}}{u_{m+k+1}^2}.$$

En utilisant la méthode des trapèzes, on trouve :

$$A > -\frac{d}{u_N} + (d-c)u_{k+1} \left[\frac{1}{2u_{k+1}^2} + \frac{1}{2u_N^2} \right] + \int_{u_{k+1}}^{u_N} \frac{(d-c)u_{k+1}}{dx^2} dx,$$

$$A > -\frac{d}{u_N} + (d-c)u_{k+1} \left[\frac{1}{2u_{k+1}^2} + \frac{1}{2u_N^2} \right] + \left(\frac{d-c}{d} \right) u_{k+1} \left[\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_N} \right],$$

le dernier terme valant (par utilisation de (7)) :

$$\frac{d-c}{d} u_{k+1} \frac{u_N - u_{k+1}}{u_{k+1}u_N} = \frac{1}{N-k-1} \cdot \frac{d(N-k-1)}{u_N} = \frac{d}{u_N}.$$

Donc

$$A > (d-c)u_{k+1} \left(\frac{1}{2u_{k+1}^2} + \frac{1}{2u_N^2} \right) > 0,$$

et

$$T(x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_N) < T(x_1, \dots, x_k, u_{k+1}, \dots, u_{N-1}).$$

En répétant le procédé on trouve une suite $t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_{k+l}$ telle que

$$t_{k+2} - t_{k+1} = \dots = t_{k+l} - t_{k+l-1} = x_1.$$

Nous sommes alors dans le cas a), donc (d'après (6))

$$T(x_1, x_2, \dots, x_N) \leq \sum_{m \leq \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m} + 2 \left(\frac{x_1}{x_N} \right).$$

Deuxième cas : la suite $x_1, x_2 - x_1, \dots, x_N - x_{N-1}$ est croissante. Alors d'après le lemme 4, il existe n tel que

$$x_1 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} < x_{n+1} - x_n < x_{n+2} - x_{n+1} \\ < \dots < x_N - x_{N-1}.$$

Soit k tel que $n+1 \leq k \leq N-1$.

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_N) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}} \right] = \frac{x_{k-1}}{x_k^2} - \frac{1}{x_{k+1}}.$$

Et si T est maximum on a donc $\frac{x_{k-1}}{x_k} = \frac{x_k}{x_{k+1}}$,

et donc $\frac{x_{N-1}}{x_N} = \frac{x_{N-2}}{x_{N-1}} = \dots = \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} = \lambda < 1.$

Soit $A = \frac{x_N}{x_n}$, on a donc $\frac{1}{A} = \lambda^{(N-n)}$,

$$T(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + (N-n)(1-\lambda).$$

Notons $S_1 = (N-n)(1-\lambda) = -\frac{\text{Log}A}{\text{Log}\lambda} \cdot (1-\lambda)$ et dérivons S_1 en faisant varier λ (on suppose A fixe):

$$\frac{-S'_1}{\text{Log}A} = \frac{-\text{Log}\lambda - (1-\lambda)\lambda^{-1}}{(\text{Log}\lambda)^2};$$

et comme $-\text{Log}\lambda - \frac{1}{\lambda} + 1 < 0$ on a $S'_1 > 0$.

D'autre part $\lambda = \frac{x_n}{x_{n+1}} \leq \frac{nx_1}{(n+1)x_1} = \frac{n}{n+1}$, donc

$$S_1 \leq -\frac{\text{Log}A}{\text{Log}\left(\frac{n}{n+1}\right)} \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = -\frac{\text{Log}A}{(n+1)\text{Log}\left(\frac{n}{n+1}\right)},$$

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \frac{\text{Log}A}{(n+1) \left[\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} + \dots \right]} \leq \frac{\text{Log}A}{1 + \frac{1}{2(n+1)}} \\ &= \frac{2n+2}{2n+3} \text{Log}A. \end{aligned}$$

Soit $S_2 = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)} + \dots + \frac{1}{\left[\frac{x_N}{x_1} \right]}$, on a

$$S_2 + \frac{1}{n} > \text{Log} \frac{1 + \left[\frac{x_N}{x_1} \right]}{n} \geq \text{Log} \frac{x_N}{x_n} = \text{Log} A.$$

Distinguons deux cas:

1) $\text{Log} A \geq 5 \geq \frac{2n+3}{n}$. Alors

$$S_2 - S_1 \geq -\frac{1}{n} + \text{Log } A - \text{Log } A + \frac{1}{2n+3} \text{Log } A \geq 0.$$

donc $T(x_1, \dots, x_N) \leq \sum_{m \leq \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m}$.

2) $\text{Log } A < 5$. Alors $A < e^5$, donc

$$S_2 > S_1 - \frac{1}{n} > S_1 - \frac{e^5}{\left(\frac{x_N}{x_1}\right)},$$

$$T(x_1, \dots, x_N) \leq \sum_{m \leq \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m} + e^5 \frac{x_1}{x_N}.$$

LEMME 6. Soit $(x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ une suite réelle strictement croissante s et t deux entiers tels que $s > t$,

$$T(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = \sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq s, r \neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(x_r - x_s)^2 (x_r - x_t)^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} & T(\dots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \dots, x_{s-1}, x_s, x_{s+1}, \dots) \\ & \leq \frac{\pi^2(\delta_s^{-1} + \delta_t^{-1})}{3(x_s - x_t)^2} - \frac{3(\delta_s + \delta_t)}{(x_s - x_t)^4}. \end{aligned}$$

Définissons $(y_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ par

$$\begin{aligned} y_n &= x_s + (n-s)\delta_s & \text{si } n > s, \\ y_n &= x_n & \text{si } t \leq n \leq s, \\ y_n &= x_t - (t-n)\delta_t & \text{si } n < t. \end{aligned}$$

D'après (5) on a

$$T(\dots, y_{t-1}, y_t, y_{t+1}, \dots, y_s, y_{s+1}, \dots) \geq T(\dots, x_{t-1}, x_t, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots)$$

Il suffit de vérifier que l'inégalité du lemme est vérifiée pour la suite (y_m) . Soit N tel que

$$(8) \quad s - N < t \quad \text{et} \quad L = \left[\frac{y_s - y_{s-N}}{\delta_s} \right]$$

Remarquons que pour r, s, t distincts on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(y_r - y_s)^2} \frac{1}{(y_r - y_t)^2} &= \left[\frac{1}{y_s - y_r} + \frac{1}{y_r - y_t} \right]^2 \frac{1}{(y_s - y_t)^2} \\ &= \left[\frac{1}{(y_s - y_r)^2} + \frac{1}{(y_r - y_t)^2} \right] \frac{1}{(y_s - y_t)^2} + \frac{2}{(y_s - y_t)^3} \left[\frac{1}{y_s - y_r} + \frac{1}{y_r - y_t} \right]. \end{aligned}$$

On trouve que

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{\substack{r=s-N \\ r \neq s, r \neq t}}^{s+L} \frac{\delta_r}{(y_s - y_r)^2 (y_r - y_t)^2} \\ &= \sum_{\substack{r=s-N \\ r \neq s, r \neq t}}^{s+L} \left[\frac{\delta_r}{(y_s - y_t)^2} \left(\frac{1}{(y_r - y_s)^2} + \frac{1}{(y_r - y_t)^2} \right) + \frac{2\delta_r}{(y_s - y_t)^3} \left(\frac{1}{(y_r - y_t)} - \frac{1}{(y_r - y_s)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Or, par application du lemme 5, on a :

$$\begin{aligned} - \sum_{\substack{r=s-N \\ r \neq s, r \neq t}}^{s+L} \frac{\delta_r}{y_r - y_s} &= \sum_{r=s-N}^{s-1} \frac{\delta_r}{y_s - y_r} - \frac{\delta_t}{y_s - y_t} - \sum_{r=s+1}^{s+L} \frac{\delta_r}{y_r - y_s} \\ &< O\left(\frac{y_s - y_{s-1}}{y_s - y_{s-N}}\right) + \sum_{\substack{m \leq \frac{y_s - y_{s-N}}{y_s - y_{s-1}}}} \frac{1}{m} - \sum_{m \leq L} \frac{1}{m} - \frac{\delta_t}{y_s - y_t}. \end{aligned}$$

Comme $\left[\frac{y_s - y_{s-N}}{y_s - y_{s-1}} \right] \leq \left[\frac{y_s - y_{s-N}}{\delta_s} \right] = L$, on a donc

$$(9) \quad - \sum_{\substack{r=s-N \\ r \neq s, r \neq t}}^{s+L} \frac{\delta_r}{y_r - y_s} < O\left(\frac{y_s - y_{s-1}}{y_s - y_{s-N}}\right) - \frac{\delta_t}{y_s - y_t}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{r=s-N \\ r \neq s, r \neq t}}^{s+L} \frac{\delta_r}{y_r - y_t} &= \sum_{r=t+1}^{s+L} \frac{\delta_r}{y_r - y_t} - \sum_{r=t-1}^{s-N} \frac{\delta_r}{y_t - y_r} - \frac{\delta_s}{y_s - y_t} \\ &\leq \frac{-\delta_s}{y_s - y_t} + O\left(\frac{y_{t+1} - y_t}{y_{s+L} - y_t}\right) + \sum'_m \frac{1}{m} - \sum''_m \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

avec, pour \sum' : $1 \leq m \leq \frac{y_{s+L} - y_t}{y_{t+1} - y_t}$, et pour \sum'' : $1 \leq m \leq N + t - s$,

en appliquant à nouveau le lemme 5 et remarquant que $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{s-N}$ sont équidistants. La différence entre les deux dernières sommes est (si elle n'est pas négative) :

$$\begin{aligned}
\sum_{N+t-s < m \leq \frac{y_{s+L}-y_t}{y_{t+1}-y_t}} \frac{1}{m} &\leq \frac{1}{N+t-s} \left(\frac{y_{s+L}-y_t}{y_{t+1}-y_t} - (N+t-s) \right) \\
&\leq \frac{1}{N+t-s} \left(\frac{L\delta_s + y_s - y_t}{\delta_t} - (N+t-s) \right) \\
&\leq \frac{1}{N+t-s} \left(\frac{y_s - y_{s-N} + y_s - y_t}{\delta_t} - (N+t-s) \right) \\
(10) \quad &\leq \frac{1}{N+t-s} \left(\frac{2y_s - 2y_t}{\delta_t} \right)
\end{aligned}$$

en utilisant (8) et l'équidistance de y_{t-1}, \dots, y_{s-N} . D'après (9) et (10) on a :

$$\begin{aligned}
S_N &\leq \sum_{\substack{r=s-N \\ r \neq s, r \neq t}}^{s+L} \frac{\delta_r}{(y_s - y_t)^2} \left[\frac{1}{(y_r - y_s)^2} + \frac{1}{(y_r - y_t)^2} \right] - \frac{2(\delta_s + \delta_t)}{(y_s - y_t)^4} \\
&+ \frac{2}{(y_s - y_t)^3} \left[O\left(\frac{y_{t+1} - y_t}{y_{s+L} - y_t}\right) + O\left(\frac{y_s - y_{s-1}}{y_s - y_{s-N}}\right) + \frac{2(y_s - y_t)}{(N+t-s)\delta_t} \right].
\end{aligned}$$

Quand N tend vers l'infini le dernier crochet tend vers zéro, donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq s, r \neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(y_r - y_s)^2 (y_r - y_t)^2} &\leq - \frac{2(\delta_s + \delta_t)}{(y_s - y_t)^4} \\
+ \sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq s, r \neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(y_s - y_t)^2} &\left[\frac{1}{(y_r - y_s)^2} + \frac{1}{(y_r - y_t)^2} \right].
\end{aligned}$$

D'après (3) on sait que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq s, r \neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(y_r - y_s)^2} &\leq \frac{\pi^2}{3} \delta_s^{-1} - \frac{\delta_t}{(y_t - y_s)^2}, \\
\sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq s, r \neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(y_r - y_t)^2} &\leq \frac{\pi^2}{3} \delta_t^{-1} - \frac{\delta_s}{(y_s - y_t)^2}, \text{ d'où le lemme.}
\end{aligned}$$

PREUVE DU THÉORÈME.

Sans perte de généralité, on peut supposer

$$x_1 < x_2 < \dots < x_R \quad \text{et} \quad \sum_{r=1}^R |u_r|^2 = 1.$$

Notons $c_r = \sqrt{\delta_r}$ pour $r = 1, 2, \dots, R$ et définissons la matrice M par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (M)_{r,s} = 0 & \text{si } r = s, \\ (M)_{r,s} = \frac{c_r c_s}{x_r - x_s} & \text{si } r \neq s. \end{array} \right.$$

La matrice iM est hermitienne, c'est pourquoi ses vecteurs propres sont orthogonaux et

$$\left| \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{c_r c_s}{x_r - x_s} u_r \bar{u}_s \right|$$

est donc maximal si $(u_r)_{r=1}^R$ est un vecteur propre de M dont la valeur propre est maximale en valeur absolue. Admettons que c'est le cas et soit $i\mu$ la valeur propre (qui est donc purement imaginaire), on a donc

$$\mu^2 = \left| \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{c_r c_s}{(x_r - x_s)} u_r \bar{u}_s \right|^2 \leq \sum_r |u_r|^2 \sum_{\substack{s \\ s \neq r}} \left| \sum_s \frac{c_r c_s}{(x_r - x_s)} \bar{u}_s \right|^2,$$

(à cause de l'inégalité de Cauchy)

$$\mu^2 \leq \sum_r \sum_{\substack{s \\ s \neq r}} \sum_{\substack{t \\ t \neq r}} \frac{c_r^2 c_s c_t \bar{u}_s u_t}{(x_r - x_s)(x_r - x_t)}.$$

Le membre de droite peut être partagé en deux parties selon que $s = t$ ou non, et remarquons que si $s \neq t$, on a

$$\frac{1}{(x_r - x_s)(x_r - x_t)} = \frac{1}{(x_s - x_t)} \left[\frac{1}{x_r - x_s} - \frac{1}{x_r - x_t} \right],$$

donc

$$\mu^2 \leq \sum_r \sum_{\substack{s \\ s \neq r}} \frac{\delta_r \delta_s |u_s|^2}{(x_r - x_s)^2} + \sum_{\substack{r,s,t \\ r \neq s, r \neq t \\ s \neq t}} \frac{c_r^2 c_s c_t}{x_s - x_t} \left[\frac{1}{x_r - x_s} - \frac{1}{x_r - x_t} \right] \bar{u}_s u_t.$$

D'après (3) on a

$$(11) \quad \sum_s \sum_{\substack{r \\ r \neq s}} \frac{\delta_r \delta_s |u_s|^2}{(x_r - x_s)^2} \leq \sum_s \frac{\pi^2}{3} |u_s|^2 = \frac{\pi^2}{3}$$

et la seconde somme devient

$$S = \sum_{\substack{r,s,t \\ r \neq s, s \neq t}} \frac{c_r^2 c_s c_t \bar{u}_s u_t}{(x_s - x_t)(x_r - x_s)} + \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{c_r^3 c_s \bar{u}_s u_r}{(x_s - x_r)^2} \\ - \sum_{\substack{r,s,t \\ r \neq t, s \neq t}} \frac{c_r^2 c_s c_t \bar{u}_s u_t}{(x_s - x_t)(x_r - x_t)} + \sum_{\substack{r,t \\ r \neq t}} \frac{c_r^3 c_t \bar{u}_r u_t}{(x_r - x_t)^2}.$$

Dans la première somme, on a: $\sum_{\substack{t \\ t \neq s}} \frac{c_s c_t u_t}{x_s - x_t} = i\mu u_s$,

et dans la troisième, on a: $\sum_{\substack{s \\ s \neq t}} \frac{c_s c_t \bar{u}_s}{(x_s - x_t)} = i\mu \bar{u}_t$,

d'où

$$S = 2 \operatorname{Re} \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{c_r^3 c_s \bar{u}_s u_r}{(x_s - x_r)^2},$$

$$(12) \quad \frac{S}{2} \leq U = \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{c_r^3 c_s |u_s| |u_r|}{(x_s - x_r)^2}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy, on a:

$$U^2 \leq \sum_r |u_r|^2 \cdot \sum_r \left| \sum_{\substack{s \\ s \neq r}} \frac{c_r c_s^3 |u_s|}{(x_r - x_s)^2} \right|^2,$$

$$U^2 \leq \sum_r \sum_{\substack{s,t \\ s \neq r \\ t \neq r}} \frac{c_r^2 c_s^3 c_t^3 |u_s| |u_t|}{(x_r - x_s)^2 (x_r - x_t)^2},$$

$$U^2 \leq \sum_r \sum_{\substack{s \\ s \neq r}} \frac{\delta_r \delta_s^3 |u_s|^2}{(x_r - x_s)^4} + \sum_{\substack{r,s,t \\ r \neq s, r \neq t \\ s \neq t}} \frac{c_r^2 c_s^3 c_t^3 |u_s| |u_t|}{(x_r - x_s)^2 (x_r - x_t)^2}.$$

Par application de (4) et du lemme 6, on trouve:

$$U^2 \leq 2 \cdot \frac{\pi^4}{90} + \sum_{\substack{s,t \\ s \neq t}} \frac{\pi^2}{3} c_s^3 c_t^3 (\delta_s^{-1} + \delta_t^{-1}) \frac{|u_s| |u_t|}{(x_s - x_t)^2},$$

$$U^2 \leq \frac{\pi^4}{45} + \frac{2\pi^2}{3} U,$$

$$\left(U - \frac{\pi^2}{3} \right)^2 \leq \frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^4}{9},$$

$$U \leq \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{3} \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

De (11) et (12) on déduit

$$\mu^2 \leq \frac{\pi^2}{3} + 2 \left[\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{3} \sqrt{\frac{6}{5}} \right],$$

$$\mu \leq \sqrt{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{6}{5}}} \pi < \frac{4}{3} \pi.$$

Le point faible de la démonstration est sans doute la non utilisation du terme $-\frac{3(\delta_s + \delta_t)}{(x_s - x_t)^4}$ du lemme 6.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARBAN, M. B. The "density" of the zeros of Dirichlet L -series and the problem of the sum of primes and "near primes". *Math. Sb.* 61 (103) (1963), 418-425.
- [2] BOMBIERI, E. *Le grand crible dans la théorie analytique des nombres*. Astérisque 18, S.M.F. (1974).
- [3] HALBERSTAM, H. and H. E. RICHERT. *Sieve Methods*. Academic Press, Londres (1974).
- [4] MONTGOMERY, H. L. *Topics in multiplicative number theory*. Lecture Notes in Math., vol. 227, Springer-Verlag, Berlin (1971).
- [5] ——— The analytic principle of the large sieve. *Bull. of the Am. Math. Soc.* 84 (4) (1978), 73-81.
- [6] MONTGOMERY, H. L. and R. C. VAUGHAN. The large sieve. *Mathematika* 20 (1973), 119-134.
- [7] MONTGOMERY, H. L. and R. C. VAUGHAN. Hilbert's inequality. *J. London Math. Soc.* (2), 8 (1974), 73-81.

(Reçu le 24 juin 1983)

Emmanuel Preissmann

Institut de Mathématiques
 Université de Lausanne
 CH-1015 Lausanne/Dorigny

Vide-leer-empty