Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1984)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GROUPE DE BRAUER DES CORPS DE FRACTIONS RATIONNELLES À COEFFICIENTS COMPLEXES

Autor: Steiner, Philippe A. J.

Kapitel: §1. Théorème d'Auslander-Brumer-Faddeev

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53824

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

où f parcourt l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans $\mathbf{C}(t_1, ..., t_i)$ pour $1 \leqslant i < n$. On établit enfin que $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ est divisible et que, pour $n \geqslant 2$, sa classe d'isomorphie est indépendante de n.

Les deux premiers paragraphes sont consacrés aux rappels du théorème d'Auslander-Brumer-Faddeev (qui fournit la décomposition de $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ en somme directe) et de la normalisation en géométrie algébrique. Dans les paragraphes 3 et 4, on dérive la suite exacte qui détermine le groupe $\chi(K)$. On en tire au paragraphe 5 un procédé pour construire « explicitement » des algèbres simples, puis on termine en établissant au paragraphe 6 la formule finale pour $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ et en montrant que ce groupe est divisible.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à accomplir ce travail, notamment M. Kervaire qui m'en a suggéré le thème.

§ 1. Théorème d'Auslander-Brumer-Faddeev

Ce théorème calcule la structure du groupe de Brauer d'un corps de fractions rationnelles à une variable sur un corps quelconque. En se restreignant à la caractéristique zéro pour simplifier, on va rappeler (d'après [7]) comment il découle d'un résultat classique de Tsen.

Si K est un corps, on notera $K^{\bullet}$ son groupe multiplicatif, $\mathscr{P}(K)$ l'ensemble des polynômes en T unitaires irréductibles à coefficients dans K et si $f \in \mathscr{P}(K)$, K_f sera l'extension $K[T]/(f(T))$ de K. Si $\bar{K}$ est une clôture algébrique de K, on considérera le groupe $\chi_{\bar{K}}(K)$ des homomorphismes $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ d'ordre fini (le groupe des homomorphismes continus pour les topologies discrète de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et naturelle de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$). Comme $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est abélien, si $\tilde{K}$ est une autre clôture algébrique de K, $\chi_{\bar{K}}(K)$ est canoniquement isomorphe à $\chi_{\tilde{K}}(K)$ et sera noté simplement $\chi(K)$.

Théorème 1.1 (Auslander-Brumer [1], Faddeev [6]). *Soit K un corps de caractéristique zéro. On a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Br}(K(t)) = \mathrm{Br}(K) \oplus \{\oplus_{f \in \mathscr{P}(K)} \chi(K_f)\}.$$

Démonstration. Tout repose sur l'interprétation du groupe de Brauer comme groupe de cohomologie galoisienne. Pour cette interprétation, ainsi que pour la notion de produit croisé, on pourra se reporter à [14].

1) *Construction de l'isomorphisme:* Fixons une clôture algébrique $\bar{K}$ de K. Par le théorème de Tsen [14, Chap. 19, § 4], $\mathrm{Br}(\bar{K}(t)) = 0$ et donc

(1) $$\mathrm{Br}(K(t)) = \mathrm{Br}(\bar{K}(t)/K(t)) \simeq H^2(G, \bar{K}(t)^\bullet),$$

où $G := \mathrm{Gal}(\bar{K}(t)/K(t))$ s'identifie à $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$.

Si l'on écrit additivement le groupe $\bar{K}(t)^\bullet$, la factorisation des fractions rationnelles s'exprime comme $\bar{K}(t)^\bullet = \bar{K}^\bullet \oplus \{\oplus_{\xi \in \bar{K}} \mathbf{Z}(t-\xi)\}$. On peut en déduire une décomposition de $\bar{K}(t)^\bullet$ comme G-module. En effet, l'orbite par G de $\xi \in \bar{K}$ étant l'ensemble des racines du polynôme minimal de ξ sur K, on a

(2) $$\bar{K}(t)^\bullet = \bar{K}^\bullet \oplus \{\oplus_{f \in \mathscr{P}(K)} O(\xi_f)\},$$

où $\xi_f \in \bar{K}$ est une racine de f et $O(\xi_f)$ le $\mathbf{Z}G$-module engendré par $t - \xi_f$. En substituant (2) dans (1) et en utilisant $H^2(G, \bar{K}^\bullet) \simeq \mathrm{Br}(K)$, on obtient

(3) $$\mathrm{Br}(K(t)) = \mathrm{Br}(K) \oplus \{\oplus_{f \in \mathscr{P}(K)} H^2(G, O(\xi_f))\}.$$

Le choix de la racine ξ_f de f fournit un plongement de K_f dans $\bar{K}$, de sorte que le stabilisateur de ξ_f est $G_f := \mathrm{Gal}(\bar{K}/K_f)$ et que $O(\xi_f)$ est isomorphe au G-module $\mathbf{Z}[G/G_f]$ sur les classes à gauche de G modulo G_f. Considérons le G_f-module trivial $\mathbf{Z}$. On peut munir $\mathrm{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})$ d'une structure de G-module par $(g \cdot \varphi)(x) = \varphi(xg)$ pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})$, $g \in G$ et $x \in \mathbf{Z}G$.

Comme l'indice de G_f dans G est fini (égal à $[K_f : K]$), on a un isomorphisme de G-modules

$$\mathbf{Z}[G/G_f] \to \mathrm{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})$$
$$\sum n_c c \mapsto [g^{-1} \mapsto n_{\bar{g}}],$$

où $\bar{g} \in G/G_f$ est la classe de $g \in G$. En utilisant le lemme de Shapiro [19, n° 3-7-14], on en déduit

(4) $$H^2(G, O(\xi_f)) \simeq H^2(G, \mathrm{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})) \simeq H^2(G_f, \mathbf{Z}).$$

La suite exacte $0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$ de G_f-modules triviaux fournit une suite exacte en cohomologie

$$H^1(G_f, \mathbf{Q}) \to H^1(G_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} H^2(G_f, \mathbf{Z}) \to H^2(G_f, \mathbf{Q}),$$

où δ est un isomorphisme, puisque $H^i(G_f, \mathbf{Q}) = 0$, $\mathbf{Q}$ étant G_f-injectif. On vérifie enfin que $H^1(G_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \chi(K_f)$, d'où $H^2(G, O(\xi_f)) \simeq \chi(K_f)$. Cela fournit avec (3) l'isomorphisme voulu.

2) *Naturalité de l'isomorphisme :* On montre que cet isomorphisme ne dépend pas du choix de la racine $\xi_f \in \bar{K}$ du polynôme $f \in \mathscr{P}(K)$.

Fixons $f \in \mathscr{P}(K)$ et choisissons $\xi_1, \xi_2 \in \bar{K}$ deux racines de f. Notons K_1, K_2 les plongements de K_f dans $\bar{K}$ et $G_1 = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K_1)$, $G_2 = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K_2)$ les stabilisateurs correspondants. Si $g \in G$ est tel que $\xi_2 = g\xi_1$ (d'où $K_2 = gK_1$ et $G_2 = gG_1g^{-1}$), il induit un isomorphisme $\alpha: \chi(K_1) \xrightarrow{\sim} \chi(K_2)$ par $\alpha(\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}xg)$. Il faut montrer que les éléments de $\mathrm{Br}(K(t))$ correspondant à $\varphi \in \chi(K_1)$ et $\alpha(\varphi) \in \chi(K_2)$ sont les mêmes.

On vérifie facilement que α induit un isomorphisme $\beta: H^2(G_1, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(G_2, \mathbf{Z})$ donné sur un cocycle c par $\beta(c)(x, y) = c(g^{-1}xg, g^{-1}yg)$. Pour $i = 1, 2$, notons $j_i: \mathbf{Z} \hookrightarrow O(\xi_i)$, $j_i(1) = t - \xi_i$ et $k_i: O(\xi_i) \hookrightarrow \bar{K}(t)^\bullet$ l'inclusion. L'isomorphisme de (4) s'exprime à l'aide de la corestriction comme $\mathrm{cor} \circ j_{i*}$ et s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^2(G_i, \mathbf{Z}) & \overset{j_{i*}}{\hookrightarrow} & H^2(G_i, O(\xi_i)) & \xrightarrow{\mathrm{cor}} & H^2(G, O(\xi_i)) \\ & & \uparrow k_{i*} & & \uparrow k_{i*} \\ & & H^2(G_i, \bar{K}(t)^\bullet) & \xrightarrow{\mathrm{cor}} & H^2(G, \bar{K}(t)^\bullet) \end{array}$$

décrivant le plongement de $H^2(G_i, \mathbf{Z})$ dans $H^2(G, \bar{K}(t)^\bullet)$.

Pour montrer que β devient l'identité dans $H^2(G, \bar{K}(t)^\bullet)$, on peut définir $\gamma: H^2(G_1, \bar{K}(t)^\bullet) \to H^2(G_2, \bar{K}(t)^\bullet)$, qui prolonge β, par

$$\gamma(c)(x, y) = g \cdot c(g^{-1}xg, g^{-1}yg)$$

et vérifier la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} H^2(G_1, \bar{K}(t)^\bullet) & \xrightarrow{\mathrm{cor}} & H^2(G, \bar{K}(t)^\bullet) \\ \gamma \downarrow & & \| \\ H^2(G_2, \bar{K}(t)^\bullet) & \xrightarrow{\mathrm{cor}} & H^2(G, \bar{K}(t)^\bullet). \end{array}$$

Grâce à la définition de la cohomologie galoisienne, on se ramène à une extension galoisienne finie de K contenant K_1 et K_2. Le carré correspondant commute alors en vertu de la compatibilité de la corestriction avec la conjugaison [19, prop. 2-4-5] et du fait qu'un automorphisme intérieur est trivial en cohomologie [19, cor. 2-3-2]. □

Remarque 1.2. Il est facile d'expliciter l'isomorphisme du théorème 1.1

$$\iota: \mathrm{Br}(K) \oplus \{\oplus_{f \in \mathscr{P}(K)} \chi(K_f)\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(K(t)).$$

En effet, si $[A] \in \mathrm{Br}(K)$, clairement $\iota([A]) = [A \otimes_K K(t)] \in \mathrm{Br}(K(t))$ et si $f \in \mathscr{P}(K)$, $\varphi \in \chi(K_f)$, on peut également construire une algèbre simple repré-

sentant $\iota(\varphi) \in \mathrm{Br}(K(t))$. Choisissons une racine $\xi_f \in \bar{K}$ de f et considérons le corps fixe L de $\bar{K}$ par $\mathrm{Ker}\varphi$ qui est une extension cyclique de K_f. Si m est son degré, notons θ le générateur de $G'_f := \mathrm{Gal}(L/K_f)$ tel que $\varphi(\theta) = 1/m$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

L'image de φ dans $H^2(G'_f, L(t)^\bullet) \subset H^2(G_f, \bar{K}(t)^\bullet)$ est représentée par le cocycle

$$c(\theta^i, \theta^j) = \begin{cases} t - \xi_f & \text{si} \quad i + j \geqslant m, \\ 1 & \text{si} \quad i + j < m. \end{cases} \qquad (0 \leqslant i, j < m).$$

Il lui correspond dans $\mathrm{Br}(L(t)/K_f(t)) \subset \mathrm{Br}(K_f(t))$ la classe du produit croisé cyclique $A := (L(t)/K_f(t), \theta, t - \xi_f)$. On a alors $\iota(\varphi) = \mathrm{cor}([A])$, où $\mathrm{cor}: \mathrm{Br}(K_f(t)) \to \mathrm{Br}(K(t))$ est la corestriction.

Mentionnons qu'il existe des formules explicites pour calculer la corestriction d'une algèbre simple [16], si bien que $\iota(\varphi)$ peut être exprimé explicitement.

Conséquence: Le théorème 1.1 donne une méthode pour calculer le groupe de Brauer des corps de fractions rationnelles à coefficients complexes. Sachant que $\mathrm{Br}(\mathbf{C}) = 0$ et $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t)) = 0$ (par le théorème de Tsen), on peut faire une récurrence sur n:

$$(5) \qquad \mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_{n+1})) = \mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n)) \oplus \{\oplus_{f \in \mathscr{P}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n))} \chi(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n)_f)\}.$$

Tout le problème est de calculer les groupes $\chi(K)$ pour les corps de fonctions complexes à n variables K. On va d'abord faire un rappel de géométrie algébrique.

§ 2. La normalisation

Dans tout ce paragraphe, on ne fait que rappeler une construction très standard de géométrie algébrique: la normalisation, car elle joue un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 3.1.

Toutes les variétés considérées dans ce paragraphe seront algébriques irréductibles (réduites) et le corps de base k algébriquement clos. On notera $k(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur une variété X, qui est égal au corps des fractions de l'anneau $k[U]$ des fonctions régulières sur U, pour tout ouvert affine U de X.