§1. Théorème d'Auslander-Brumer-Faddeev

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.08.2024**

où f parcourt l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans $\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_i)$ pour $1 \leqslant i < n$. On établit enfin que $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n))$ est divisible et que, pour $n \geqslant 2$, sa classe d'isomorphie est indépendante de n.

Les deux premiers paragraphes sont consacrés aux rappels du théorème d'Auslander-Brumer-Faddeev (qui fournit la décomposition de $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n))$ en somme directe) et de la normalisation en géométrie algébrique. Dans les paragraphes 3 et 4, on dérive la suite exacte qui détermine le groupe $\chi(K)$. On en tire au paragraphe 5 un procédé pour construire « explicitement » des algèbres simples, puis on termine en établissant au paragraphe 6 la formule finale pour $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n))$ et en montrant que ce groupe est divisible.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à accomplir ce travail, notamment M. Kervaire qui m'en a suggéré le thème.

§ 1. Théorème d'Auslander-Brumer-Faddeev

Ce théorème calcule la structure du groupe de Brauer d'un corps de fractions rationnelles à une variable sur un corps quelconque. En se restreignant à la caractéristique zéro pour simplifier, on va rappeler (d'après [7]) comment il découle d'un résultat classique de Tsen.

Si K est un corps, on notera $K^{\bullet}$ son groupe multiplicatif, $\mathscr{P}(K)$ l'ensemble des polynômes en T unitaires irréductibles à coefficients dans K et si $f \in \mathscr{P}(K)$, K_f sera l'extension $K[T]/(f(T))$ de K. Si $\bar{K}$ est une clôture algébrique de K, on considérera le groupe $\chi_{\bar{K}}(K)$ des homomorphismes $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ d'ordre fini (le groupe des homomorphismes continus pour les topologies discrète de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et naturelle de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$). Comme $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est abélien, si $\tilde{K}$ est une autre clôture algébrique de K, $\chi_{\bar{K}}(K)$ est canoniquement isomorphe à $\chi_{\tilde{K}}(K)$ et sera noté simplement $\chi(K)$.

Théorème 1.1 (Auslander-Brumer [1], Faddeev [6]). *Soit K un corps de caractéristique zéro. On a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Br}(K(t)) = \mathrm{Br}(K) \oplus \{\oplus_{f \in \mathscr{P}(K)} \chi(K_f)\} .$$

Démonstration. Tout repose sur l'interprétation du groupe de Brauer comme groupe de cohomologie galoisienne. Pour cette interprétation, ainsi que pour la notion de produit croisé, on pourra se reporter à [14].

1) *Construction de l'isomorphisme:* Fixons une clôture algébrique $\bar{K}$ de K. Par le théorème de Tsen [14, Chap. 19, § 4], $\mathrm{Br}(\bar{K}(t)) = 0$ et donc

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Br}(K(t)) = \mathrm{Br}(\bar{K}(t)/K(t)) \simeq H^2(G, \bar{K}(t)^{\bullet}),$$

où $G := \mathrm{Gal}(\bar{K}(t)/K(t))$ s'identifie à $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$.

Si l'on écrit additivement le groupe $\bar{K}(t)^{\bullet}$, la factorisation des fractions rationnelles s'exprime comme $\bar{K}(t)^{\bullet} = \bar{K}^{\bullet} \oplus \{\oplus_{\xi \in \bar{K}} \mathbf{Z}(t-\xi)\}$. On peut en déduire une décomposition de $\bar{K}(t)^{\bullet}$ comme G-module. En effet, l'orbite par G de $\xi \in \bar{K}$ étant l'ensemble des racines du polynôme minimal de ξ sur K, on a

$$\text{(2)} \qquad \bar{K}(t)^{\bullet} = \bar{K}^{\bullet} \oplus \{\oplus_{f \in \mathscr{P}(K)} O(\xi_f)\},$$

où $\xi_f \in \bar{K}$ est une racine de f et $O(\xi_f)$ le $\mathbf{Z}G$-module engendré par $t - \xi_f$. En substituant (2) dans (1) et en utilisant $H^2(G, \bar{K}^{\bullet}) \simeq \mathrm{Br}(K)$, on obtient

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{Br}(K(t)) = \mathrm{Br}(K) \oplus \{\oplus_{f \in \mathscr{P}(K)} H^2(G, O(\xi_f))\}.$$

Le choix de la racine ξ_f de f fournit un plongement de K_f dans $\bar{K}$, de sorte que le stabilisateur de ξ_f est $G_f := \mathrm{Gal}(\bar{K}/K_f)$ et que $O(\xi_f)$ est isomorphe au G-module $\mathbf{Z}[G/G_f]$ sur les classes à gauche de G modulo G_f. Considérons le G_f-module trivial $\mathbf{Z}$. On peut munir $\mathrm{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})$ d'une structure de G-module par $(g \cdot \varphi)(x) = \varphi(xg)$ pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})$, $g \in G$ et $x \in \mathbf{Z}G$.

Comme l'indice de G_f dans G est fini (égal à $[K_f : K]$), on a un isomorphisme de G-modules

$$\mathbf{Z}[G/G_f] \to \mathrm{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})$$
$$\textstyle\sum n_c c \mapsto [g^{-1} \mapsto n_{\bar{g}}],$$

où $\bar{g} \in G/G_f$ est la classe de $g \in G$. En utilisant le lemme de Shapiro [19, n° 3-7-14], on en déduit

$$\text{(4)} \qquad H^2(G, O(\xi_f)) \simeq H^2(G, \mathrm{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})) \simeq H^2(G_f, \mathbf{Z}).$$

La suite exacte $0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$ de G_f-modules triviaux fournit une suite exacte en cohomologie

$$H^1(G_f, \mathbf{Q}) \to H^1(G_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} H^2(G_f, \mathbf{Z}) \to H^2(G_f, \mathbf{Q}),$$

où δ est un isomorphisme, puisque $H^i(G_f, \mathbf{Q}) = 0$, $\mathbf{Q}$ étant G_f-injectif. On vérifie enfin que $H^1(G_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \chi(K_f)$, d'où $H^2(G, O(\xi_f)) \simeq \chi(K_f)$. Cela fournit avec (3) l'isomorphisme voulu.

2) *Naturalité de l'isomorphisme:* On montre que cet isomorphisme ne dépend pas du choix de la racine $\xi_f \in \bar{K}$ du polynôme $f \in \mathscr{P}(K)$.

Fixons $f \in \mathscr{P}(K)$ et choisissons ξ_1, $\xi_2 \in \bar{K}$ deux racines de f. Notons K_1, K_2 les plongements de K_f dans $\bar{K}$ et $G_1 = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K_1)$, $G_2 = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K_2)$ les stabilisateurs correspondants. Si $g \in G$ est tel que $\xi_2 = g\xi_1$ (d'où $K_2 = gK_1$ et $G_2 = gG_1g^{-1}$), il induit un isomorphisme $\alpha\colon \chi(K_1) \xrightarrow{\sim} \chi(K_2)$ par $\alpha(\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}xg)$. Il faut montrer que les éléments de $\mathrm{Br}(K(t))$ correspondant à $\varphi \in \chi(K_1)$ et $\alpha(\varphi) \in \chi(K_2)$ sont les mêmes.

On vérifie facilement que α induit un isomorphisme $\beta\colon H^2(G_1, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(G_2, \mathbf{Z})$ donné sur un cocycle c par $\beta(c)(x, y) = c(g^{-1}xg, g^{-1}yg)$. Pour $i = 1, 2$, notons $j_i\colon \mathbf{Z} \hookrightarrow O(\xi_i)$, $j_i(1) = t - \xi_i$ et $k_i\colon O(\xi_i) \hookrightarrow \bar{K}(t)^{\bullet}$ l'inclusion. L'isomorphisme de (4) s'exprime à l'aide de la corestriction comme $\mathrm{cor} \circ j_{i*}$ et s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^2(G_i, \mathbf{Z}) & \overset{j_{i*}}{\hookrightarrow} & H^2(G_i, O(\xi_i)) & \overset{\mathrm{cor}}{\to} & H^2(G, O(\xi_i)) \\ & & \downarrow k_{i*} & & \downarrow k_{i*} \\ & & H^2(G_i, \bar{K}(t)^{\bullet}) & \overset{\mathrm{cor}}{\to} & H^2(G, \bar{K}(t)^{\bullet}) \end{array}$$

décrivant le plongement de $H^2(G_i, \mathbf{Z})$ dans $H^2(G, \bar{K}(t)^{\bullet})$.

Pour montrer que β devient l'identité dans $H^2(G, \bar{K}(t)^{\bullet})$, on peut définir $\gamma\colon H^2(G_1, \bar{K}(t)^{\bullet}) \to H^2(G_2, \bar{K}(t)^{\bullet})$, qui prolonge β, par

$$\gamma(c)(x, y) = g \cdot c(g^{-1}xg, g^{-1}yg)$$

et vérifier la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} H^2(G_1, \bar{K}(t)^{\bullet}) & \overset{\mathrm{cor}}{\to} & H^2(G, \bar{K}(t)^{\bullet}) \\ \gamma \downarrow & & \| \\ H^2(G_2, \bar{K}(t)^{\bullet}) & \overset{\mathrm{cor}}{\to} & H^2(G, \bar{K}(t)^{\bullet}). \end{array}$$

Grâce à la définition de la cohomologie galoisienne, on se ramène à une extension galoisienne finie de K contenant K_1 et K_2. Le carré correspondant commute alors en vertu de la compatibilité de la corestriction avec la conjugaison [19, prop. 2-4-5] et du fait qu'un automorphisme intérieur est trivial en cohomologie [19, cor. 2-3-2]. □

Remarque 1.2. Il est facile d'expliciter l'isomorphisme du théorème 1.1

$$\iota\colon \mathrm{Br}(K) \oplus \{\oplus_{f \in \mathscr{P}(K)} \chi(K_f)\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(K(t)).$$

En effet, si $[A] \in \mathrm{Br}(K)$, clairement $\iota([A]) = [A \otimes_K K(t)] \in \mathrm{Br}(K(t))$ et si $f \in \mathscr{P}(K)$, $\varphi \in \chi(K_f)$, on peut également construire une algèbre simple représentant $\iota(\varphi) \in \mathrm{Br}(K(t))$. Choisissons une racine $\xi_f \in \bar{K}$ de f et considérons le corps fixe L de $\bar{K}$ par $\mathrm{Ker}\varphi$ qui est une extension cyclique de K_f. Si m est son degré, notons θ le générateur de $G'_f := \mathrm{Gal}(L/K_f)$ tel que $\varphi(\theta) = 1/m$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

L'image de φ dans $H^2(G'_f, L(t)^\bullet) \subset H^2(G_f, \bar{K}(t)^\bullet)$ est représentée par le cocycle

$$c(\theta^i, \theta^j) = \begin{cases} t - \xi_f & \text{si } \ i + j \geqslant m\,, \\ 1 & \text{si } \ i + j < m\,. \end{cases} \qquad (0 \leqslant i, j < m)\,.$$

Il lui correspond dans $\mathrm{Br}(L(t)/K_f(t)) \subset \mathrm{Br}(K_f(t))$ la classe du produit croisé cyclique $A := (L(t)/K_f(t), \theta, t - \xi_f)$. On a alors $\iota(\varphi) = \mathrm{cor}([A])$, où cor: $\mathrm{Br}(K_f(t)) \to \mathrm{Br}(K(t))$ est la corestriction.

Mentionnons qu'il existe des formules explicites pour calculer la corestriction d'une algèbre simple [16], si bien que $\iota(\varphi)$ peut être exprimé explicitement.

Conséquence: Le théorème 1.1 donne une méthode pour calculer le groupe de Brauer des corps de fractions rationnelles à coefficients complexes. Sachant que $\mathrm{Br}(\mathbf{C}) = 0$ et $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t)) = 0$ (par le théorème de Tsen), on peut faire une récurrence sur n:

$$(5) \qquad \mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_{n+1})) = \mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n)) \oplus \{\oplus_{f \in \mathscr{P}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n))} \chi(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n)_f)\}\,.$$

Tout le problème est de calculer les groupes $\chi(K)$ pour les corps de fonctions complexes à n variables K. On va d'abord faire un rappel de géométrie algébrique.

§ 2. La normalisation

Dans tout ce paragraphe, on ne fait que rappeler une construction très standard de géométrie algébrique: la normalisation, car elle joue un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 3.1.

Toutes les variétés considérées dans ce paragraphe seront algébriques irréductibles (réduites) et le corps de base k algébriquement clos. On notera $k(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur une variété X, qui est égal au corps des fractions de l'anneau $k[U]$ des fonctions régulières sur U, pour tout ouvert affine U de X.