§2. La normalisation

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

sentant $\iota(\varphi) \in \mathrm{Br}(K(t))$. Choisissons une racine $\xi_f \in \bar{K}$ de f et considérons le corps fixe L de $\bar{K}$ par $\mathrm{Ker}\varphi$ qui est une extension cyclique de K_f. Si m est son degré, notons θ le générateur de $G'_f := \mathrm{Gal}(L/K_f)$ tel que $\varphi(\theta) = 1/m$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

L'image de φ dans $H^2(G'_f, L(t)^{\bullet}) \subset H^2(G_f, \bar{K}(t)^{\bullet})$ est représentée par le cocycle

$$c(\theta^i, \theta^j) = \begin{cases} t - \xi_f & \text{si } \ i + j \geqslant m\,, \\ 1 & \text{si } \ i + j < m\,. \end{cases} \qquad (0 \leqslant i, j < m)\,.$$

Il lui correspond dans $\mathrm{Br}(L(t)/K_f(t)) \subset \mathrm{Br}(K_f(t))$ la classe du produit croisé cyclique $A := (L(t)/K_f(t), \theta, t - \xi_f)$. On a alors $\iota(\varphi) = \mathrm{cor}([A])$, où $\mathrm{cor}\colon \mathrm{Br}(K_f(t)) \to \mathrm{Br}(K(t))$ est la corestriction.

Mentionnons qu'il existe des formules explicites pour calculer la corestriction d'une algèbre simple [16], si bien que $\iota(\varphi)$ peut être exprimé explicitement.

Conséquence: Le théorème 1.1 donne une méthode pour calculer le groupe de Brauer des corps de fractions rationnelles à coefficients complexes. Sachant que $\mathrm{Br}(\mathbf{C}) = 0$ et $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t)) = 0$ (par le théorème de Tsen), on peut faire une récurrence sur n:

$$(5) \qquad \mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_{n+1})) = \mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n)) \oplus \{\oplus_{f \in \mathscr{P}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n))} \chi(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n)_f)\}\,.$$

Tout le problème est de calculer les groupes $\chi(K)$ pour les corps de fonctions complexes à n variables K. On va d'abord faire un rappel de géométrie algébrique.

§ 2. La normalisation

Dans tout ce paragraphe, on ne fait que rappeler une construction très standard de géométrie algébrique: la normalisation, car elle joue un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 3.1.

Toutes les variétés considérées dans ce paragraphe seront algébriques irréductibles (réduites) et le corps de base k algébriquement clos. On notera $k(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur une variété X, qui est égal au corps des fractions de l'anneau $k[U]$ des fonctions régulières sur U, pour tout ouvert affine U de X.

Rappelons qu'un morphisme $\mu: Y \to X$ entre deux variétés est dit fini s'il satisfait les conditions équivalentes (voir [12, Chap. III, § 1, prop. 5])

(i) Pour tout ouvert affine U de X, $\mu^{-1}(U)$ est affine et l'application $\mu^*: k[U] \to k[\mu^{-1}(U)]$ induite par μ fait de $k[\mu^{-1}(U)]$ un module de type fini sur $k[U]$.

(ii) Il existe un recouvrement affine $\{U_i\}_{i \in I}$ de X tel que pour tout $i \in I$, $\mu^{-1}(U_i)$ est affine et μ^* fait de $k[\mu^{-1}(U_i)]$ un module de type fini sur $k[U_i]$.

Rappelons aussi qu'une variété Y est dite normale si pour tout ouvert affine V de Y, l'anneau $k[V]$ est intégralement clos. On utilisera qu'une variété lisse est normale.

THÉORÈME 2.1. *Soit X une variété et L une extension finie de $k(X)$. Alors il existe une variété normale Y et un morphisme fini $\nu: Y \to X$ tels que $k(Y)$ est isomorphe à L (notons $\tau: k(Y) \xrightarrow{\sim} L$) et que $\tau \circ \nu^*$ est l'inclusion donnée de $k(X)$ dans L. De plus, si (Y, ν) et (Y', ν') satisfont ces conditions, alors il existe un isomorphisme $\sigma: Y \xrightarrow{\sim} Y'$ tel que $\nu' \circ \sigma = \nu$.*

Définition: La paire (Y, ν) du théorème est appelée la normalisation de X dans L.

Démonstration du théorème 2.1.

1) *Unicité:* Soit (Y, ν) une normalisation de X dans L. Si $U \subset X$ est un ouvert affine, comme ν est fini, $V := \nu^{-1}(U)$ est affine et $k[V]$ est entier sur $k[U]$. Comme $k[V]$ est aussi intégralement clos par normalité de Y, c'est la clôture intégrale de $k[U]$ dans $k(Y)$.

Soit (Y', ν') une autre normalisation de X dans L et soit $\tau: k(Y') \to k(Y)$ un isomorphisme qui est l'identité sur $k(X)$. Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement affine de X. Pour $i \in I$, notons $V_i = \nu^{-1}(U_i)$ et $V'_i = \nu'^{-1}(U_i)$. Comme $k[V_i]$ et $k[V'_i]$ sont les clôtures intégrales de $k[U_i]$ dans $k(Y)$ et $k(Y')$, $\tau(k[V'_i]) = k[V_i]$ et τ induit un isomorphisme $\sigma_i: V_i \to V'_i$.

On montre que ces isomorphismes σ_i sont compatibles. Soient $i, j \in I$. Comme l'intersection de deux ouverts affines est affine [12, Chap. II, § 6, prop. 6], $V'_i \cap V'_j$ est affine et les restrictions de σ_i et σ_j de $V_i \cap V_j$ dans $V'_i \cap V'_j$ coïncident, car elles sont toutes deux induites par la restriction de τ à $k[V'_i \cap V'_j]$. Donc les isomorphismes σ_i sont compatibles et ils définissent $\sigma: Y \xrightarrow{\sim} Y'$. Par construction, $\nu' \circ \sigma = \nu$.

2) *Existence:* Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement affine fini de X. Pour $i \in I$, notons B_i la clôture intégrale de $k[U_i]$ dans L. Comme $k[U_i]$ est une algèbre de type fini sur k, B_i est un module de type fini sur $k[U_i]$ (voir [21, Chap. V, § 4, th. 9]) et une algèbre de type fini sur k. Notons $V_i = \mathrm{Specm}(B_i)$ et $\nu_i \colon V_i \to U_i$ le morphisme fini défini par l'inclusion $k[U_i] \subset B_i = k[V_i]$.

Montrons qu'on peut recoller les V_i pour construire la normalisation. Soient $i, j \in I$. Comme $V_{ij} := \nu_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ est normal et $\nu_i|_{V_{ij}}$ fini (ce sont des propriétés locales), la paire $(V_{ij}, \nu_i|_{V_{ij}})$ est une normalisation de $U_i \cap U_j$ dans L. Il en est de même de $(V_{ji}, \nu_j|_{V_{ji}})$, donc par unicité de la normalisation, ces paires sont isomorphes. On peut ainsi recoller les V_i en une prévariété Y et définir $\nu \colon Y \to X$ coïncidant avec ν_i sur chaque V_i.

Pour que Y soit une variété, il faut que la diagonale soit fermée dans $Y \times Y$, ce qu'on va vérifier sur le recouvrement $\{V_i \times V_j\}_{i, j \in I}$. Pour tout $i, j \in I$, la diagonale Δ de $V_i \times V_j$ est irréductible, car isomorphe à $V_i \cap V_j$. Comme X est une variété, la diagonale δ de $U_i \times U_j$ est fermée et donc $(\nu_i \times \nu_j)^{-1}(\delta)$ est un fermé de $V_i \times V_j$ contenant Δ. On montre que Δ en est en fait une composante irréductible.

En effet, si $\Sigma = \bar{\Delta}$ est la composante irréductible de $(\nu_i \times \nu_j)^{-1}(\delta)$ qui contient Δ, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V_i \cap V_j & \xrightarrow{D} & \Sigma \\ \nu \downarrow & & \downarrow \; \nu_i \times \nu_j \\ U_i \cap U_j & \xrightarrow{d} & \delta \end{array}$$

où D et d sont les isomorphismes sur les diagonales. Comme $(\nu_i \times \nu_j) \circ D = d \circ \nu$ est fini, D est fini et l'image de D est Σ, car tout morphisme fini dominant est surjectif [18, Chap. I, th. 5.4]. On a donc $\Delta = \Sigma = \bar{\Delta}$. □

PROPOSITION 2.2. *Soient* ρ *un automorphisme d'une variété* X *et* (Y, ν) *la normalisation de* X *dans une extension finie de* $k(X)$. *Alors l'application* $\varepsilon \colon \sigma \mapsto \sigma^*$ *est une bijection entre l'ensemble des automorphismes de* Y *projetés sur* ρ *par* ν *et celui des automorphismes de* $k(Y)$ *dont la restriction à* $k(X)$ *est* ρ^*.

Démonstration.

1) *Injectivité de* ε*:* Soient $\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}(Y)$ tels que $\sigma^* = \tau^*$ et soit $y \in Y$. On a forcément $\sigma(y) = \tau(y)$. En effet, si $\sigma(y) \neq \tau(y)$, on peut trouver un

ouvert affine V de Y les contenant — en prenant l'image réciproque par ν d'un ouvert affine de X contenant $\nu(\sigma(y)) = \nu(\tau(y))$ — ainsi qu'une fonction $\lambda \in k[V] \subset k(Y)$ telle que $\lambda(\sigma(y)) \neq \lambda(\tau(y))$, ce qui contredit $\sigma^* = \tau^*$.

2) *Surjectivité de* ε : Soit $\tau \in \mathrm{Aut}(k(Y))$ tel que $\tau|_{k(X)} = \rho^*$. On procède comme dans la démonstration du théorème 2.1 (unicité) pour construire $\sigma \in \mathrm{Aut}(Y)$ tel que $\sigma^* = \tau$.

Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement affine de X tel que $\rho(U_i) = U_{r(i)}$. Pour $i \in I$, notons $V_i = \nu^{-1}(U_i)$. Comme $k[V_i]$ est la clôture intégrale de $k[U_i]$ dans $k(Y)$ et que $\tau|_{k[U_i]} = \rho^*$, on a $\tau(k[V_{r(i)}]) = k[V_i]$ et τ induit un isomorphisme $\sigma_i \colon V_i \to V_{r(i)}$. Ces morphismes sont compatibles, car pour tout $i, j \in I$, les restrictions de σ_i et σ_j à $V_i \cap V_j$ sont induites par τ. On peut donc définir $\sigma \in \mathrm{Aut}(Y)$ coïncidant avec σ_i sur V_i pour tout $i \in I$. Par construction, σ est projeté sur ρ par ν et $\sigma^* = \tau$. □

Etant donné un morphisme $\mu \colon Y \to X$, on notera $\mathrm{Aut}_X^{\mathrm{alg}}(Y)$ le groupe des automorphismes de Y se projetant sur l'identité de X par μ et si L/K est une extension de corps, $\mathrm{Aut}(L/K)$ sera le groupe des automorphismes de L qui sont l'identité sur K.

On déduit immédiatement de la proposition 2.2

COROLLAIRE 2.3. *Soit* (Y, ν) *la normalisation d'une variété* X *dans une extension finie de* $k(X)$. *Alors* $\sigma \mapsto (\sigma^*)^{-1}$ *est un isomorphisme de* $\mathrm{Aut}_X^{\mathrm{alg}}(Y)$ *sur* $\mathrm{Aut}(k(Y)/k(X))$.

COROLLAIRE 2.4. *Soit* X *une variété et soient* $L'/L/K$ *des extensions galoisiennes finies de* $K := k(X)$. *Si* (Y, ν) *et* (Y', μ) *sont les normalisations de* X *dans* L *et de* Y *dans* L', *alors* $(Y', \nu \circ \mu)$ *est la normalisation de* X *dans* L' *et on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathrm{Gal}(L'/L) & \to & \mathrm{Gal}(L'/K) & \to & \mathrm{Gal}(L/K) & \to & 1 \\ & & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \\ 1 & \to & \mathrm{Aut}_Y^{\mathrm{alg}}(Y') & \to & \mathrm{Aut}_X^{\mathrm{alg}}(Y') & \overset{\mu_*}{\to} & \mathrm{Aut}_X^{\mathrm{alg}}(Y) & \to & 1 \end{array}$$

où les isomorphismes verticaux sont ceux du corollaire 2.3 et où μ_* *est la projection sur* Y *des automorphismes de* Y'. □