

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1984)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GROUPE DE BRAUER DES CORPS DE FRACTIONS  
RATIONNELLES À COEFFICIENTS COMPLEXES  
**Kapitel:** §5. Application à la construction d'algèbres simples  
**Autor:** Steiner, Philippe A. J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-53824>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

où les homomorphismes verticaux sont induits par l'inclusion  $X \subset \tilde{X}$ , celui de gauche étant surjectif. Comme  $\tilde{X}$  est compact, on peut appliquer le raisonnement ci-dessus à  $\tilde{c}$ . On en déduit que  $\tilde{c}$  et donc  $c$  sont induits par la première classe de Chern.  $\square$

§ 5. APPLICATION À LA CONSTRUCTION D'ALGÈBRES SIMPLES

On a vu que pour un corps de fonctions complexes  $K$  et pour une variété algébrique lisse  $X$  avec  $\mathbf{C}(X) = K$ , on a la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{a} \chi(K) \xrightarrow{b} \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

*Problème 5.1.* Soient  $f \in \mathcal{P}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$  un polynôme unitaire irréductible,  $\xi$  une racine de  $f$  engendrant l'extension  $K$  de  $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)$  et  $X$  une variété algébrique lisse avec  $\mathbf{C}(X) = K$ .

Etant donné  $\delta \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  tel que  $c(\delta) = 0$ , on aimerait décrire tous les relevés de  $\delta$  par  $b$  et les éléments de  $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n+1}))$  leur correspondant par l'isomorphisme (5).

On va résoudre ce problème en explicitant l'homomorphisme  $b$  (lemme 5.2 ci-dessous). Par contre, la méthode de calcul de  $a$  qu'on peut déduire de la démonstration du théorème 3.1 (point 4, avec  $\Delta = \emptyset$ ) n'est pas très explicite. Nous comparerons les deux descriptions de  $\text{Im } a = \text{Ker } b$  en fin de paragraphe.

**LEMME 5.2.** Soit  $\varphi \in \chi(K)$ . Notons  $L = \bar{K}^{\text{Ker } \varphi}$  et  $\theta$  le générateur de  $\text{Gal}(L/K)$  tel que  $\varphi(\theta) = 1/m \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ . Soit  $\kappa \in K$  tel que  $L = K(\sqrt[m]{\kappa})$  et  $\theta(\sqrt[m]{\kappa}) = e^{-2\pi i/m} \cdot \sqrt[m]{\kappa}$ . Alors  $b(\varphi) = (\kappa) \otimes 1/m \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ , où  $(\kappa)$  est le diviseur de  $\kappa$ .

*Démonstration.* D'après la définition de  $b$ , il faut d'abord calculer l'image de  $\varphi$  dans  $\lim_{D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  par l'isomorphisme  $F$  du théorème 3.1. On va voir qu'on peut représenter  $F(\varphi)$  dans  $H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  pour  $D$  le support du diviseur  $(\kappa)$ , puis on va exprimer son représentant  $\pi^*(\varphi)$  en terme de  $\kappa$ . Il faudra ensuite revenir à la démonstration du théorème 4.1 pour calculer  $b(\varphi)$  à partir de  $\pi^*(\varphi)$ .

1) *Choix de  $D \in \mathcal{V}(X)$ :* Notons  $(Y, \nu)$  la normalisation de  $X$  dans  $L$  et  $D \in \mathcal{V}(X)$  le support de  $(\kappa)$ . On montre que  $D$  contient la ramification de  $\nu$ .

Soit  $U$  un ouvert affine quelconque de  $X - D$ . Considérons la sous-variété affine  $V$  de  $U \times \mathbf{C}$  définie par

$$(14) \quad V = \{(x, \zeta) \in U \times \mathbf{C} \mid \zeta^m = \kappa(x)\}.$$

L'anneau  $C[V] = (C[U])[T]/(T^m - \kappa)$  est de type fini sur  $C[U]$  et  $C(V) = L$ . De plus,  $V$  est lisse et donc normale. En effet, la première projection  $p_1: V \rightarrow U$  est un revêtement topologique non ramifié et  $U$  est lisse. Donc  $V$  est analytiquement (et par conséquent algébriquement) lisse. Ceci montre que  $(V, p_1)$  est isomorphe à la normalisation de  $U$  dans  $L$  et que  $v$  est non ramifié au-dessus de  $U$ .

2) Calcul de  $\pi^*(\varphi) \in H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ : Notons  $W = X - D$ ,  $Z = Y - v^{-1}(D)$  et définissons comme en (8)  $\pi: H_1(W) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ . On va calculer explicitement  $\pi^*(\varphi) \in \text{Hom}(H_1(W), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ .

Considérons le diagramme commutatif

$$(15) \quad \begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{\lambda} & \mathbf{C} & \ni & \zeta \\ v \downarrow & & e \downarrow & & \downarrow \\ W & \xrightarrow{\kappa} & \mathbf{C} & \ni & \zeta^m \end{array}$$

où  $\lambda := \sqrt[m]{\kappa} \in L$ . En utilisant l'orientation naturelle de  $\mathbf{C}$ , on identifie  $H_1(\mathbf{C})$  à  $\frac{1}{m}\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$  et on définit  $\psi: H_1(W) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  comme la composition

$$H_1(W) \xrightarrow{\kappa_*} H_1(\mathbf{C}) = \frac{1}{m}\mathbf{Z} \rightarrow \frac{1}{m}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

On va voir que  $\pi^*(\varphi) = \psi$ .

On a  $\text{Ker}\psi = v_*H_1(Z)$ . En effet, l'inclusion  $v_*H_1(Z) \subset \text{Ker}\psi$  est claire, car d'après (15),  $\kappa_*(v_*H_1(Z)) = e_*(\lambda_*H_1(Z)) \subset mH_1(\mathbf{C}) = \mathbf{Z}$ . Réciproquement, soit  $\omega \in \text{Ker}\psi$ , qu'on représente par un lacet  $l$  en un point  $x \in W$ , et soit  $y \in v^{-1}(x)$ . En remarquant que sur l'ouvert  $V$  de (14)  $\lambda$  coïncide avec la seconde projection  $p_2: V \rightarrow \mathbf{C}$ , on voit que dans (15),  $\lambda$  est bijective sur les fibres. Ainsi, tout comme le relevé de  $\kappa(l)$  en  $\lambda(y)$  (par l'hypothèse  $\omega \in \text{Ker}\psi$ ), le relevé de  $l$  en  $y$  est un lacet et donc  $\omega \in v_*H_1(Z)$ .

Comme  $\text{Ker}(\pi^*(\varphi)) = v_*H_1(Z)$  également, on sait déjà que  $\pi^*(\varphi)$  et  $\psi$  coïncident à un automorphisme de  $\frac{1}{m}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$  près. Ils sont en fait égaux: en effet, en choisissant  $\omega \in H_1(W)$  tel que  $\psi(\omega) = 1/m$ , on va montrer que  $\pi(\omega) = \theta \in \text{Gal}(L/K)$ , d'où  $\pi^*(\varphi) = \psi$ , car  $\varphi(\theta) = 1/m$ . Soit  $l$  un lacet en  $x$  représentant  $\omega$  et soit  $y \in v^{-1}(x)$ . Si l'on note  $\sigma$  l'automorphisme de  $Z$  induit par  $\omega$ , c'est-à-dire l'image de  $\omega$  par la surjection  $H_1(W) \rightarrow \text{Aut}_W(Z)$  de (7), le relevé  $\tilde{l}$  de  $l$  joint  $y$  à  $\sigma(y)$  et se projette sur  $\lambda(\tilde{l})$  allant de  $\lambda(y)$  à  $\lambda(\sigma(y))$ . D'autre part,  $\lambda(\tilde{l})$  qui est le relevé de  $\kappa(l)$  en  $\lambda(y)$  a pour extrémité  $e^{2\pi i/m} \cdot \lambda(y)$ . Ainsi, d'après la définition de l'isomorphisme du corol-

laire 2.3,  $\pi(\omega) = \theta \in \text{Gal}(L/K)$ , car  $\pi(\omega)$  envoie  $\lambda$  sur  $\lambda \circ \sigma^{-1} = e^{-2\pi i/m} \cdot \lambda = \theta(\lambda)$ .

3) *Calcul de  $b(\varphi) \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$* : Par définition,  $b(\varphi)$  est représenté par  $\beta^*(\pi^*(\varphi)) \in \bigoplus_{\Delta \in \mathcal{C}(D)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_{\Delta} \hookrightarrow \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  où  $\beta^*$  est le dual de l'homomorphisme  $\beta: H_0(D_r) \rightarrow H_1(X-D)$  de (11). Rappelons aussi que  $\beta = \partial \circ \tau$ , où  $\partial$  est l'opérateur bord et  $\tau$  l'isomorphisme de Thom (10).

Soit  $\Delta \in \mathcal{C}(D)$ , déterminant l'élément  $\eta_{\Delta}$  de  $H_0(D_r)$ . Comme géométriquement  $\tau(\eta_{\Delta})$  peut être représenté par un petit disque transverse à  $\Delta$ ,  $\beta(\eta_{\Delta}) = \hat{c}(\tau(\eta_{\Delta}))$  peut l'être par un petit lacet  $l$  autour de  $\Delta$ , dont l'orientation dépend des conventions. On les fixe maintenant de sorte que  $\kappa(l)$  représente  $\text{ord}_{\Delta}(\kappa)$  fois le générateur naturel de  $H_1(\mathbf{C})$ . En utilisant que  $\pi^*(\varphi) = \psi$  et que  $\varepsilon_{\Delta}$  est le dual de  $\eta_{\Delta}$ , on voit alors que  $\beta^*(\pi^*(\varphi)) = \psi \circ \beta = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}(D)} [\text{ord}_{\Delta}(\kappa)/m] \varepsilon_{\Delta}$ . Donc  $b(\varphi) = (\kappa) \otimes 1/m \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ .  $\square$

*Solution du problème 5.1.* Soit  $f \in \mathcal{P}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$  un polynôme unitaire irréductible,  $\xi$  une racine de  $f$  engendrant l'extension  $K$  de  $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)$  et  $X$  une variété algébrique lisse avec  $\mathbf{C}(X) = K$ . Soit  $\delta \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  tel que  $c(\delta) = 0$  dans  $H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ . Alors toutes les classes d'algèbres simples centrales sur  $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n+1})$  correspondant à des relevés de  $\delta$  dans  $\chi(K)$  s'obtiennent de la façon suivante:

Comme  $c(\delta) = 0$ ,  $\delta$  est dans l'image de  $b$ . Par le lemme 5.2, il s'écrit donc (de plusieurs manières!)  $\delta = (\kappa) \otimes 1/m$ , où  $(\kappa)$  est le diviseur de  $\kappa \in K$ . Choisissons une écriture  $\delta = (\kappa) \otimes 1/m$  qu'on peut supposer réduite, i.e. telle que si  $(\kappa) = k \cdot (\kappa')$  et  $k \mid m$ , alors  $k = 1$ . Ce choix détermine un relevé  $\varphi \in \chi(K)$  de  $\delta$ . En effet,  $L := K(\sqrt[m]{\kappa})$  est une extension cyclique de degré  $m$  de  $K$  et si  $\theta$  est le générateur de  $\text{Gal}(L/K)$  tel que  $\theta(\sqrt[m]{\kappa}) = e^{-2\pi i/m} \cdot \sqrt[m]{\kappa}$ , on peut définir  $\varphi: \text{Gal}(L/K) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  par  $\varphi(\theta) = 1/m$ . Le lemme 5.2 montre que  $b(\varphi) = \delta$ . Par la remarque A.2, il correspond à  $\varphi$  dans  $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n+1}))$  la classe d'algèbres simples  $\text{cor}(L(t_{n+1})/K(t_{n+1}), \theta, t_{n+1} - \xi)$ , où  $\text{cor}: \text{Br}(K(t_{n+1})) \rightarrow \text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n+1}))$  est la corestriction.

*Remarque 5.3.* Dans le cas où  $X$  est projective, on peut voir directement que  $\delta \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  s'écrit  $\delta = (\kappa) \otimes 1/m$  lorsque  $c(\delta) = 0$ . En effet, en écrivant  $\delta = D \otimes 1/m$  avec  $D \in \text{Div}(X)$ , on va montrer comment obtenir un diviseur principal en ajoutant à  $D$  un diviseur multiple de  $m$ . Mais faisons d'abord quelques rappels (voir [3, § 6; 11]).

- (i) On peut définir  $c_1$  comme l'homomorphisme de connexion  $c_1: H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$  de la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de l'exponentielle  $0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 1$ , où  $\mathcal{O}$ , resp.  $\mathcal{O}^*$ , est le faisceau

des germes de fonctions holomorphes, resp. holomorphes non nulles, sur  $X$ .

- (ii) Considérons  $\rho: H^2(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbf{R})$  induit par l'inclusion  $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$  et notons  $H^2_{(1,1)}(X, \mathbf{R})$  le sous-espace de  $H^2(X, \mathbf{R})$  des classes représentables par des formes différentielles de type  $(1, 1)$  (via l'isomorphisme de de Rham  $H^2(X, \mathbf{R}) \simeq H^2_{DR}(X)$ ). On a alors l'égalité

$$c_1(H^1(X, \mathcal{O}^*)) = \rho^{-1}(H^2_{(1,1)}(X, \mathbf{R}))$$

entre sous-groupes de  $H^2(X, \mathbf{Z})$ .

- (iii) Comme  $X$  est projective,  $H^1(X, \mathcal{O}^*)$  est isomorphe au groupe des classes de diviseurs de  $X$ . En faisant l'abus de noter (comme précédemment)  $c_1: \text{Div}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$ , on déduit  $c_1(\text{Div}(X)) = \rho^{-1}(H^2_{(1,1)}(X, \mathbf{R}))$  de (ii).

*Démonstration de la remarque 5.3.*

- 1) Soit  $\delta = D \otimes 1/m \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  tel que  $c(\delta) = 0$ . On montre qu'on peut supposer  $c_1(D) = 0$ .

L'hypothèse  $c(\delta) = 0 \in H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  signifie que  $c_1(D)$  est divisible par  $m$  dans  $\text{Hom}(H_2(X), \mathbf{Z})$ . Quitte à amplifier  $D \otimes 1/m$  (i.e. multiplier  $D$  et  $m$  par un même entier), on peut supposer  $c_1(D)$  divisible par  $m$  dans  $H^2(X, \mathbf{Z})$ , car  $\text{Ker}\{H^2(X, \mathbf{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H_2(X), \mathbf{Z})\}$  est de torsion.

On a donc  $c_1(D) = m \cdot \eta$ , pour  $\eta \in H^2(X, \mathbf{Z})$ . D'après (iii),  $\rho(\eta) = \frac{1}{m} \cdot \rho(c_1(D))$  est dans l'espace  $H^2_{(1,1)}(X, \mathbf{R})$  et il existe un diviseur  $D'$  tel que  $\eta = c_1(D')$ . On peut donc écrire  $\delta = (D - mD') \otimes 1/m$  avec  $c_1(D - mD') = 0$ .

- 2) Supposons  $\delta = D \otimes 1/m$  avec  $c_1(D) = 0$ . On veut modifier  $D$  en un diviseur principal. D'après (i),  $c_1$  s'insère dans la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbf{Z}).$$

En utilisant (iii), on voit ainsi que le groupe des classes de diviseurs dont la première classe de Chern est nulle est isomorphe au groupe  $H^1(X, \mathcal{O})/H^1(X, \mathbf{Z})$  qui est divisible. Donc il existe un diviseur  $D'$  tel que  $D$  est linéairement équivalent à  $mD'$ ; autrement dit  $D - mD'$  est principal.  $\square$

*Remarque 5.4.* Le sous-groupe  $\text{Im} a = \text{Ker} b$  de  $\chi(K)$  est isomorphe au groupe des classes de diviseurs de torsion.

En effet, si  $\varphi \in \text{Ker} b$ , on peut regarder  $\varphi$  comme un relevé par  $b$  de  $\delta = 0$ , provenant d'une écriture réduite  $0 = (\kappa) \otimes 1/m$ . On en déduit que  $(\kappa) = m \cdot D$  pour un diviseur  $D$  dont la classe  $[D]$  est d'ordre  $m$ . On vérifie facilement que la correspondance  $\varphi \mapsto [D]$  donne l'isomorphisme annoncé en remarquant que deux écritures réduites  $(\kappa) \otimes 1/m$  et  $(\kappa') \otimes 1/m'$

déterminent le même élément de  $\chi(K)$  si et seulement si  $m' = m$  et  $\kappa'$  diffère de  $\kappa$  par une puissance  $m$ -ième.

On peut aussi faire le lien avec l'homomorphisme  $a$ . Soit  $\psi \in H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ . On calcule  $a(\psi) \in \chi(K)$  par la méthode de la démonstration du théorème 3.1 (point 4). Si  $m$  est l'ordre de  $\psi$ , on construit un morphisme algébrique fini  $v: Y \rightarrow X$  qui est un revêtement topologique non ramifié ( $\Delta = \emptyset$ ) à  $m$  feuillets. Le corps  $L := \mathbf{C}(Y)$  est une extension cyclique de degré  $m$  de  $K$  et  $a(\psi) \in \chi(K)$  provient d'un isomorphisme  $\text{Gal}(L/K) \xrightarrow{\sim} \frac{1}{m} \mathbf{Z}/\mathbf{Z}$  induit par  $\psi$ . Si  $\kappa \in K$  est tel que  $L = K(\sqrt[m]{\kappa})$ , en utilisant cette fois que  $v$  est non ramifié, on peut montrer que  $(\kappa) = m \cdot D$  pour un diviseur  $D$  dont la classe  $[D]$  est d'ordre  $m$ .

Remarquons pour terminer que cette construction ne fournit pas une description des classes de diviseurs de torsion (qu'il serait certainement très intéressant d'avoir!).

### § 6. DIVISIBILITÉ DE $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$

Auslander et Brumer ont prouvé [1] que si  $F$  est un corps de fractions rationnelles à une variable à coefficients dans un corps quelconque, alors soit  $\text{Br}(F)$  contient un sous-groupe divisible non trivial, soit  $2 \cdot \text{Br}(F) = 0$  (voir aussi [2]). On va montrer que pour tout  $n$ ,  $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$  est entièrement divisible.

Pour tout corps de fonctions complexes  $K$ , on va établir que le groupe  $\chi(K)$  est divisible en appliquant le théorème 4.1 à un modèle particulier  $X$  de  $K$ : on va choisir une variété algébrique lisse  $X$  avec  $\mathbf{C}(X) = K$  telle que  $H_1(X)$  soit libre. (Il serait aussi possible de raisonner directement sur  $\chi(K)$  en séparant chaque composante  $p$ -primaire.)

Pour démontrer l'existence d'un modèle adéquat de  $K$ , on aura besoin de deux propriétés élémentaires de la première classe de Chern

$$c_1: \text{Div}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$$

que l'on établit immédiatement.

LEMME 6.1. *Soit  $X$  une variété algébrique projective complexe lisse. Alors (i) l'image  $c_1(\text{Div}(X))$  de  $c_1$  contient le sous-groupe de torsion  $\text{Tors}(H^2(X, \mathbf{Z}))$  et (ii) on a une décomposition  $H_2(X) = N \oplus L$ , où  $N$  est le sous-groupe de  $H_2(X)$  annulé par l'évaluation de  $c_1(\text{Div}(X))$  et où  $L$  est libre.*