

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1984)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE PROBLÈME DE J. MILNOR SUR LE NOMBRE GORDIEN DES NŒUDS ALGÈBRIQUES  
**Kapitel:** §7. Quelques problèmes liés au nombre gordien  
**Autor:** Boileau, Michel / Weber, Claude  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-53827>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Le théorème 5 découle d'un calcul un peu long mais sans aucune difficulté qui donne les signatures tordues des entrelacs  $\Gamma(d, d)$ , grâce au théorème 4.

On choisit  $\omega = -1$  si  $d$  est pair, et  $\omega = \exp[2\sqrt{-1}\pi(p^i - 1)/2p^i]$  si  $d$  est impair et  $d = p^i d'$  avec  $p$  premier.

On applique ensuite les théorèmes 2 et 3 pour étendre la minoration aux entrelacs  $\Gamma(r, d)$ .

En appliquant l'argument classique de transversalité développé au § 2 nous obtenons ainsi une preuve du théorème de Rohlin et Hsiang-Szczarba, dans le cas de  $\mathbf{CP}^2$ .

**THÉORÈME ([Rh], [HS]).** *Soit  $F$  une surface différentiable, close, connexe, orientable dans  $\mathbf{CP}^2$ . Supposons que  $F$  est de degré  $d$ . Alors le genre de  $F$  est au moins égal à:  $\frac{d^2 - 4}{2}$  si  $d$  est pair et à  $\frac{d^2 - 4}{4} - \left(\frac{d'}{2}\right)^2$  si  $d$  est impair,  $d = p^i d'$ , avec  $p$  premier.*

*Note.* Comme nous n'avons pas pris de précaution quant à l'orientation globale des entrelacs, les calculs précédents montrent plutôt que la valeur absolue des signatures est égale au nombre indiqué.

## § 7. QUELQUES PROBLÈMES LIÉS AU NOMBRE GORDIEN

Le but de ce paragraphe est de mentionner et de commenter quelques problèmes liés au nombre gordien d'un entrelacs mais qui ne sont pas directement rattachés aux problèmes de R. Thom et de J. Milnor.

A-1) Dès qu'on définit un invariant des entrelacs, il est important de connaître son comportement par rapport à la somme connexe. Il est alors naturel de poser la question suivante (cf. Knot theory, Proceedings Plans-sur-Bex [Hau]): « le nombre gordien est-il additif pour la somme connexe: c'est-à-dire a-t-on  $u(K_1 \# K_2) = u(K_1) + u(K_2)$ ? »

On vérifie aisément que:  $u(K_1 \# K_2) \leq u(K_1) + u(K_2)$ .

L'exemple de la figure 8, où l'on considère la somme connexe du nœud de trèfle droit avec le nœud de trèfle gauche, montre que le nombre gordien de ce nœud, qui est 2 par l'inégalité de Wendt (cf. [QV]), peut-être atteint aussi bien en dénouant chaque facteur de la somme connexe qu'en ne respectant pas cette somme connexe.

2) Un cas particulier du problème précédent a reçu beaucoup d'attention (cf. [Lic<sub>1</sub>], [GLa<sub>1</sub>]). Il reste toujours ouvert: « les entrelacs de nombre

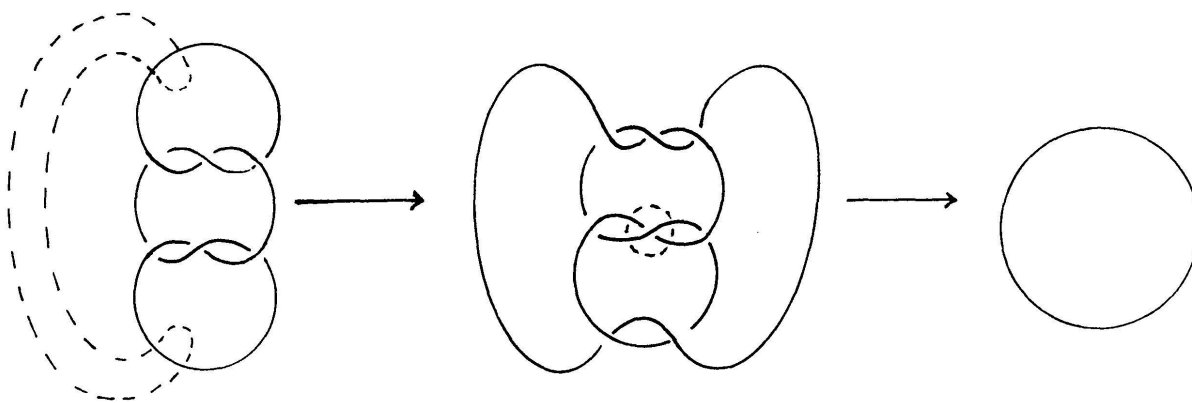


FIGURE 8

(La trace d'une boule dans laquelle s'effectue une opération de dénouement est marquée en pointillés sur le plan de projection du nœud).

gordien 1 sont-ils premiers? »

J. C. Gomez Larrañaga ([GLa<sub>1</sub>], [GLa<sub>2</sub>]) a su montrer que, dans certains cas, les nœuds de nombre gordien 1 sont premiers.

B — Une question importante, et semble-t-il difficile est le calcul pratique du nombre gordien d'un entrelacs. En particulier: 1) « Existe-t-il un procédé algorithmique, même théorique, pour calculer effectivement le nombre gordien d'un entrelacs? »

*Note.* Un tel procédé existe d'après W. Haken [Hak], pour calculer le genre de Seifert d'un nœud.

2) Si on veut utiliser une bonne projection, c'est-à-dire la définition 1, pour calculer le nombre gordien d'un entrelacs, le problème principal est de trouver sur quelle projection effectuer le calcul.

Il est certain que le nombre gordien d'un entrelacs n'est pas le nombre

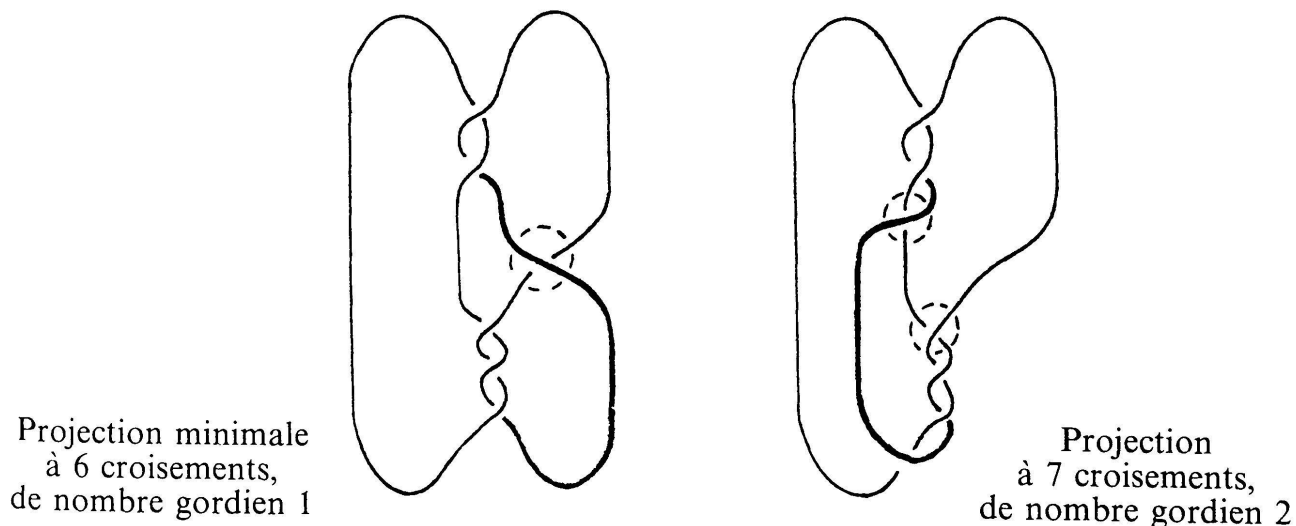




FIGURE 9

gordien de n'importe quelle bonne projection de cet entrelacs, comme le montre l'exemple du nœud  $6_2$ , qui a une projection minimale à 6 croisements de nombre gordien 1, et une projection à 7 croisements de nombre gordien 2 (voir figure 9). Les cercles en pointillés entourent les croisements que l'on peut changer pour dénouer la projection. Le brin, tracé en trait fort, est le brin que l'on bouge pour passer d'une projection à une autre.

3) Une conjecture du folklore affirme « qu'il existe une bonne projection minimale de l'entrelacs telle que le nombre gordien de cette projection soit le nombre gordien de l'entrelacs ».

Cette conjecture a son origine dans le fait que le nombre gordien d'une bonne projection d'un entrelacs est majoré par la moitié du nombre de croisements de cette projection (cf. la remarque après la définition 1 au § 3); elle n'est pour l'instant infirmée par aucun des exemples connus dans la tabulation des nœuds jusqu'à 9 croisements (sur 84 nœuds ayant au plus 9 croisements, on a pu calculer le gordien de 71 nœuds; voir Nakanishi [Na] et Lickorish-Rickard [Lic<sub>2</sub>]).

Une conjecture encore plus optimiste semble être : « le nombre gordien d'un entrelacs est le nombre gordien de n'importe quelle projection minimale ». Il pourrait être intéressant pour cette dernière conjecture d'étudier les projections minimales d'un nœud double, qui est toujours un nœud de nombre gordien 1.

4) Lorsqu'on se restreint au cas particulier des entrelacs alternés, on peut se demander « si le nombre gordien d'un entrelacs alterné est égal au nombre gordien d'une projection alternée réduite » (c'est-à-dire sans croisements triviaux du type  ou ).

Une réponse affirmative à cette question entraînerait une réponse affirmative à l'additivité du nombre gordien par rapport à la somme connexe des entrelacs alternés, d'après la caractérisation géométrique des entrelacs alternés non premiers, donnée par W. Menasco [Me].

5) Comme illustration de ce qui précède, nous conjecturons que « le nombre gordien du nœud alterné à deux ponts associé au plombage  $\overset{2a}{\bullet} \text{---} \overset{-2b}{\bullet}$ ,  $a > 0, b > 0$  (noté  $2a2b$  chez J. C. Conway [Co]) est égal à  $\inf(a, b)$  ».

C'est en fait le nombre gordien de la projection alternée (peut-être minimale?) donnée sur la figure 10.

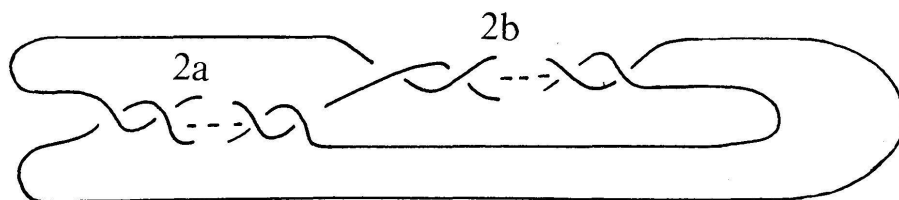


FIGURE 10

Cette conjecture est vraie si  $a = 1$  ou  $b = 1$ . Elle peut être démontrée dans le cas  $a = b = 2$  en utilisant la forme d'enlacement du revêtement double ramifié comme cela a été fait par Lickorish et Rickard (cf. [Lic<sub>2</sub>]).

Une réponse positive à cette conjecture fournirait une famille de nœuds de genre 1 et de nombre gordien arbitrairement grand (cf. § 5, E et F), mais qui ne seraient pas fibrés.

C — Soit  $\hat{\beta}$  une tresse fermée à  $n$  brins, munie de l'orientation naturelle des tresses fermées. Comme au § 4, notons  $r$  le nombre de composantes connexes de  $\hat{\beta}$  et  $c$  la longueur algébrique de  $\hat{\beta}$  (c'est-à-dire la somme exponentielle du mot  $\beta$ ).

1) D. Bennequin [Be] a posé la question: « a-t-on la minoration suivante pour le nombre gordien de  $\hat{\beta}$  :

$$\frac{1}{2} (|c| - n + r) \leq u(\hat{\beta}) ? »$$

Nous avons montré au § 4 que cette minoration est vraie pour le nombre gordien de la projection associée à la présentation en tresse fermée.

Si cette inégalité était vérifiée, cela impliquerait une réponse positive à la conjecture de J. Milnor et, plus généralement, à la conjecture du § 4 sur le nombre gordien des tresses fermées positives (dans ce cas-là  $|c| = b$ ).

Cette inégalité semble donc être la généralisation naturelle de la conjecture de J. Milnor au cas des tresses fermées quelconques. On peut cependant remarquer que, lorsque le nombre de brins  $n$  est grand par rapport à  $r$ , cette minoration n'a que peu d'intérêt.

*Note.* L. Rudolph a observé que le nombre gordien d'un entrelacs est toujours égal au nombre gordien d'une projection associée à une présentation en tresse fermée de cet entrelacs.

En effet, dans la démonstration d'Alexander qu'un entrelacs admet toujours une présentation en tresse fermée, on peut orienter convenablement les arêtes des croisements que l'on change pour dénouer l'entrelacs, pour qu'elles ne soient pas touchées par le processus d'Alexander.

D — Il pourrait sembler logique de comparer le nombre gordien  $u(K)$  d'un nœud  $K$  et le nombre de ponts  $p(K)$  de ce nœud (pour une définition de  $p(K)$  voir [Sch] ou [Ro<sub>1</sub>, ch. 4-D]), puisque ces deux invariants sont liés aux projections du nœud.

De plus: i)  $u(K)$  et  $p(K)$  sont grossièrement majorés tous les deux par le nombre minimal de croisements de  $K$ .

ii) On a les inégalités:  $e(K) \leq u(K)$  (inégalité de Wendt, cf. § 5-E), et  $e(K)$

$\leq p(K) - 1$ , où  $e(K)$  désigne le rang du module d'Alexander de  $K$ . En effet le groupe d'un nœud à  $p$  ponts admet une présentation avec  $p$  générateurs méridiens, et le calcul différentiel libre de Fox  $[Fo_1]$  montre alors qu'on obtient une présentation du module d'Alexander avec  $p - 1$  générateurs.

Cependant ces deux invariants n'ont aucun rapport entre eux. D'une part il existe des nœuds à 2 ponts de nombre gordien arbitrairement grand, par exemple les nœuds toriques  $(2, 2n + 1)$ ,  $n \geq 1$ , qui sont de nombre gordien  $n$  (cf. § 5 et [Mu]).

D'autre part, le double d'un nœud est toujours de nombre gordien 1, mais peut avoir un nombre de ponts arbitrairement grand : le double itéré  $n$  fois du nœud de trèfle a un nombre de ponts  $p = 2^{n+1}$  d'après Schubert [Sch].

E — Il existe dans la littérature bien d'autres invariants géométriques d'un entrelacs qui sont liés au nombre gordien et qui donnent lieu à des inégalités (cf. par exemple T. Shibuya [Shb]). Cependant ces invariants semblent aussi difficiles à calculer que le nombre gordien et n'ont donné lieu jusqu'à présent à aucune méthode explicite de calcul.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [A] A'CAMPO, N. Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes I. *Math. Ann.* 213 (1975), 1-32.
- [Be] BENNEQUIN, D. *Entrelacements et Structures de contact*. Thèse. Paris 1982.
- [Bi] BIRMAN, J. *Braids, Links and Mapping Class Group*. Ann. Math. Studies 82, Princeton Univ. Press 1974.
- [BW] BOILEAU, M. et C. WEBER. *Le problème de J. Milnor sur le nombre gordien des nœuds algébriques*. Publication interne. Genève (1983).
- [Co] CONWAY, J. H. An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties. In *Computational Problems in Abstract Algebra*, Pergamond Press (1970), 329-358.
- [Fo<sub>1</sub>] FOX, R. A quick trip through knot theory. In *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall (1962), 120-167.
- [Fo<sub>2</sub>] ——— Characterization of Slices and Ribbons. *Osaka J. Math.* 10 (1973), 69-76.
- [Fu] FULTON, W. *Algebraic Curves*. Math. Lecture Note series, W. A. Benjamin, Inc, 1969.
- [GLa<sub>1</sub>] GOMEZ-LARRAÑAGA, J. C. *Knot Primeness*. Thesis Cambridge University (1981).
- [GLa<sub>2</sub>] ——— Totally knotted knots are prime. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 91 (1982), 467-472.
- [GoL] GORDON, C. McA. and R. A. LITHERLAND. On the signature of a link. *Invent. Math.* 47 (1978), 53-70.
- [Gor] GORDON, C. McA. Some aspect of classical knot theory. In *Knot theory*. Springer Lecture Notes 685 (1978), 1-60.