Nous nous proposons de démontrer ici le résultat suivant:

THÉORÈME. *On a:*

$$F(x) = \sum_{\phi(n) \leqslant x} 1 = C\,x + O(x/\log x)\,.$$

Ce résultat est moins fort que celui de Bateman, mais il est obtenu de façon élémentaire. La méthode est assez classique: elle consiste à étudier la somme $L(x) = \sum_{\phi(n) \leqslant x} \log \phi(n)$, et avait été utilisée déjà par Chebyshev dans l'étude de la répartition des nombres premiers (voir aussi [Nic 2]). L'essentiel de la démonstration de notre théorème réside dans la proposition qui compare $L(x)$ à $\sum_{\phi(n) \leqslant x} 1/\phi(n)$.

Nous montrerons également que le terme de reste de notre théorème peut être majoré explicitement. Mais cela ne peut se faire actuellement qu'en utilisant des méthodes non élémentaires. En effet, nous utilisons le théorème des nombres premiers sous la forme:

$$\theta(x) = x + O(x/\log^2 x)$$

où $\theta(x)$ est la première fonction de Chebyshev. Les méthodes élémentaires (cf. [Dia] et [Ste]) permettent d'obtenir un tel reste, mais n'en donnent pas pour le moment une majoration explicite.

Je remercie vivement le referee pour d'utiles remarques, et surtout pour la démonstration du lemme 2 qui fournit un meilleur reste que la démonstration initiale.

LEMME 1. *On a:*

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\phi(n)} = C \log x + O(1)\,,$$

avec

$$C = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) = \frac{\zeta(2)\,\zeta(3)}{\zeta(6)}\,.$$

Démonstration. La démonstration du lemme 1 est due semble-t-il à Landau (cf. [Lan]). La méthode est celle utilisée de façon très classique pour évaluer la somme des premières valeurs d'une fonction arithmétique multiplicative (cf. par exemple, [Har, ch. 18]). On écrit ici

$$\frac{1}{\phi(n)} = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} d\, h(d)\,,$$

où h est la fonction multiplicative définie par

$$h(p) = \frac{1}{p(p-1)} \quad \text{et} \quad h(p^\alpha) = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \geqslant 2\,.$$

Une estimation plus précise de $S(x)$, est donnée dans [Sit].

LEMME 2. *On a:*

$$T(x) = \sum_{\phi(n) \leqslant x} \frac{1}{\phi(n)} = C \log x + O(1)\,,$$

où C est défini dans le lemme 1.

Démonstration. D'après le lemme 1, il suffit de prouver

$$T(x) - S(x) = O(1)\,.$$

On observe d'abord que, pour $t \geqslant 2$,

$$\sum_{n \geqslant t} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{n \geqslant t} \left(\frac{1}{n - 1/2} - \frac{1}{n + 1/2} \right) = \min_{\substack{n \geqslant t \\ n \in \mathbf{N}}} \frac{1}{n - 1/2} \leqslant \frac{1}{t - 1/2} \leqslant \frac{\pi^2}{6t}$$

et que cette inégalité est encore vérifiée pour tout $t > 0$.

On a ensuite:

$$T(x) - S(x) = \sum_{\substack{n \geqslant x \\ \phi(n) \leqslant x}} \frac{1}{\phi(n)} \leqslant \sum_{n \geqslant x} \frac{x}{\phi(n)} \frac{1}{\phi(n)}\,.$$

Soit $g(n)$ la fonction multiplicative définie par:

$$g(p) = \frac{2\,p - 1}{(p-1)^2} \quad \text{et} \quad g(p^\alpha) = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \geqslant 2\,.$$

Nous vérifions que

$$\frac{n^2}{\phi^2(n)} = \sum_{d \mid n} g(d)$$

(les deux membres sont multiplicatifs et la relation est vraie lorsque $n = p^\alpha$). Il s'ensuit que

$$\sum_{n \geqslant x} \frac{1}{\phi^2(n)} = \sum_{n \geqslant x} \frac{1}{n^2} \sum_{d \mid n} g(d) = \sum_{d=1}^{\infty} g(d) \sum_{\substack{n \geqslant x \\ d \mid n}} \frac{1}{n^2}$$

$$= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{g(d)}{d^2} \sum_{m \geqslant x/d} \frac{1}{m^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6x} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{g(d)}{d}$$

$$= \frac{\pi^2}{6x} \prod_p \left(1 + \frac{2p-1}{p(p-1)^2}\right) = O(1/x)\,.$$

La valeur du produit infini ci-dessus est 4,431. On peut donc préciser:

$$0 \leqslant T(x) - S(x) \leqslant \frac{\pi^2}{6} 4{,}431 \leqslant 7{,}3\,.$$

LEMME 3. *Soit* $\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p$ *la fonction de Chebyshev. On pose* $\theta^*(x) = \sum_{p \leqslant x} \log(p-1)$. *Il existe des constantes* c_1, c_2, c_3, c_4 *telles que pour tout* $x \geqslant 1$, *on ait:*

(i) $$\theta^*(x) \leqslant \theta^*(x+1) \leqslant \theta^*(x) + \log x \leqslant \theta^*(x) + \frac{c_1 x}{\log^2(2+x)}\,,$$

(ii) $$\theta(x) - \frac{c_1 x}{\log^2(2+x)} \leqslant \theta(x) - \log x \leqslant \theta^*(x) \leqslant \theta(x)\,,$$

(iii) $$|\,\theta(x) - x\,| \leqslant c_2 x/\log^2(2+x)\,,$$

(iv) $$\theta(x) \leqslant c_3\, x\,,$$

(v) $$\sum_{k \geqslant 2} \theta((2\,x)^{1/k}) \leqslant c_4\, x/\log^2(2+x)\,.$$

Démonstration. (i) est évident en prenant $c_1 = \max_{x \geqslant 1} x^{-1}(\log x)\log^2(2+x)$.

On prouve (ii) en observant que

$$\theta^*(x) = \theta(x) - \sum_{p \leqslant x} \log\left(\frac{p}{p-1}\right) \geqslant \theta(x) - \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \log \frac{n}{n-1} = \theta(x) - \log\,[x]\,,$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Le théorème des nombres premiers donne (iii). Le calcul de c_2 peut se faire en utilisant le résultat (non élémentaire) de Rosser et Schoenfeld (cf. [Ros] p. 266):

$$x > 1 \Rightarrow |\,\theta(x) - x\,| \leqslant 8{,}7\, x/\log^2 x\,.$$

Le résultat (iv) est dû à Chebyshev. Hanson a obtenu $c_3 = \log 3$ (cf. [Han]) par une méthode élémentaire. Le meilleur résultat actuel est dû à L. Schoenfeld (cf. [Sch], p. 360) qui donne: $c_3 = 1{,}000081$.

Enfin (v) s'obtient en remarquant que la sommation en k est finie, et a au plus $(\log 2\,x)/\log 2$ termes: Il vient ensuite

$$\sum_{k \geqslant 2} \theta((2\,x)^{1/k}) \leqslant \frac{\log 2\,x}{\log 2}\,\theta(\sqrt{2\,x}) \leqslant c_3 \sqrt{2\,x}\,\frac{\log 2\,x}{\log 2} \leqslant c_4 \frac{x}{\log^2(2+x)},$$

avec
$$c_4 = \frac{2\,c_3}{\log 2} \max_{x \geqslant 1} \frac{(\log 2\,x)\left(\log^2(2+x)\right)}{\sqrt{2\,x}}$$

PROPOSITION 1. *Avec la notation du lemme 2, on a:*

$$L(x) = \sum_{\phi(n) \leqslant x} \log \phi(n) = x\,T(x) + O(x)$$

Démonstration. Par analogie avec la fonction de Von Mangoldt, on définit la fonction arithmétique $\lambda(n)$ par:

$$\begin{aligned} \lambda(p) &= \log(p-1)\,, & & \\ \lambda(p^\alpha) &= \log p\,, & &\text{pour} \quad \alpha \geqslant 2\,, \\ \lambda(n) &= 0\,, & &\text{si} \quad n \neq p^\alpha\,. \end{aligned}$$

Et l'on a

$$\log \phi(n) = \sum_{d \mid n} \lambda(n/d)\,.$$

Il vient alors

$$L(x) = \sum_{\phi(n) \leqslant x} \sum_{d \mid n} \lambda(n/d)\,.$$

En observant que $d \mid n \Rightarrow \phi(d) \mid \phi(n)$, on obtient

$$L(x) = \sum_{\phi(d) \leqslant x} \sum_{\substack{n \\ \phi(n) \leqslant x \\ d \mid n}} \lambda(n/d)\,.$$

On pose $n = d\,d'$. Notre expression devient

(1)
$$L(x) = \sum_{\phi(d) \leqslant x} \sum_{\substack{d' \\ \phi(dd') \leqslant x}} \lambda(d') = \sum_{\phi(d) \leqslant x} \sum_{i=1}^{4} S_i(d)$$

où $S_i(d) = \sum_{\substack{d' \in E_i \\ \phi(dd') \leqslant x}} \lambda(d')\,.$

E_1 contient les nombres premiers p premiers avec d,

E_2 contient les nombres premiers p divisant d,

E_3 contient les nombres de la forme p^α, $\alpha \geqslant 2$, $(p, d) = 1$,

E_4 contient les nombres de la forme p^α, $\alpha \geqslant 2$, $p \mid d$.

En observant que, si $p \mid d$, $\phi(p^\alpha d) = p^\alpha \phi(d)$ et si $p \nmid d$, $\phi(p^\alpha d) = (p^\alpha - p^{\alpha-1})\, \phi(d)$, on obtient, avec les notations du lemme 3,

$$\theta^*\left(\frac{x}{\phi(d)}\right) \leqslant S_1(d) + S_2(d) \leqslant \theta^*\left(\frac{x}{\phi(d)} + 1\right),$$
$$0 \leqslant S_3(d) + S_4(d) \leqslant \sum_{k \geqslant 2} \theta\big((2\,x/\phi(d))^{1/k}\big)\,;$$

il résulte alors du lemme 3 que

$$\left| \sum_{i=1}^{4} S_i(d) - \frac{x}{\phi(d)} \right| \leqslant (c_1 + c_2 + c_4)\, \frac{x/\phi(d)}{\log^2(2 + x/\phi(d))}\,.$$

Cette inégalité donne, avec (1),

$$L(x) = x\,T(x) + O\big(x\,R(x)\big)\,, \tag{2}$$

où R est définie par

$$R(x) = \sum_{\phi(d) \leqslant x} \frac{1}{\phi(d)\log^2(2 + x/\phi(d))}\,.$$

On observe d'abord que $R(x) = O\big(T(x)\big)$, et on en déduit, par (2) et le lemme 2 que $L(x) = O(x \log x)$. Il s'ensuit que

$$F(x) - F(2^-) = \int_{2^-}^{x} \frac{d[L(t)]}{\log t} = \frac{L(x)}{\log x} + \int_{2}^{x} \frac{L(t)\,dt}{t \log^2 t} = O(x)\,. \tag{3}$$

On a alors

$$R(x) = \int_{1^-}^{x} \frac{d[F(t)]}{t \log^2(2 + x/t)}$$

et, par intégration par partie, on obtient

$$R(x) = \frac{F(x)}{x \log^2 3} + \int_{1}^{x} \frac{F(t)\,\big(\log(2 + x/t) - 2\,x/(2\,t + x)\big)}{t^2 \log^3 (2 + x/t)}\, dt\,.$$

Le premier terme est $O(1)$. Le terme en $\dfrac{2\,x}{2\,t + x}$ étant borné, l'intégrale, en utilisant (3), est majorée en valeur absolue par $O\big(I(x)\big)$, avec

$$I(x) = \int_{1}^{x} \frac{dt}{t \log^2(2 + x/t)}\,.$$

Le changement de variable $u = 2 + x/t$ donne

$$I(x) = \int_3^{2+x} \frac{du}{(u-2)\log^2 u} = O(1)\,.$$

On a donc $R(x) = O(1)$, et en reportant dans (2), on achève la démonstration de la proposition.

La démonstration du théorème découle immédiatement de la proposition et du lemme 2, en remarquant que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{2^-}^{x} \frac{d[L(t)]}{\log t} + O(1) \\ &= \frac{L(x)}{\log x} + \int_{2^-}^{x} \frac{L(t)\,dt}{t \log^2 t} + O(1)\,. \end{aligned}$$