1. Les foncteurs $f_!^K$ et $f_K^!$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

1. Les foncteurs $f_!^{\mathscr{K}}$ et $f^!_{\mathscr{K}}$

1.1. Un faisceau $\mathscr{P} \in \mathrm{Ob}Sh(X)$ est R-plat si le foncteur $-\underset{R}{\otimes}\mathscr{P}$ est exact. (S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau de base R on dira simplement que $\mathscr{P}$ est plat et on écrira $-\otimes\mathscr{P}$).

Un faisceau $\mathscr{P}$ est plat si et seulement si, pour tout $x \in X$, la fibre $\mathscr{P}_x$ est un R-module plat. De plus $\mathscr{P}$ est plat si et seulement si $\mathscr{P}_U$ est plat pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$.

1.2. Proposition. *La catégorie $Sh(X)$ admet suffisamment d'objets plats.*

Démonstration. Il faut montrer que pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Ob}Sh(X)$ il existe un épimorphisme $\mathscr{P} \to \mathscr{F} \to 0$ où $\mathscr{P}$ est un faisceau plat.

Notons W l'ensemble des couples $(U; s)$ où $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $s \in \mathscr{F}(U)$. Un tel couple détermine un morphisme $\tilde{s}\colon R_U \to \mathscr{F}$ de faisceaux sur X ([Go], chap. II, remarque 2.9.1). Ces morphismes induisent un morphisme $\bigoplus_W R_U \to \mathscr{F}$ qui par construction même est surjectif. Or le faisceau R_U est plat; donc d'après 1.1., ([Go], chap. II, 2.7) et [Bo2], chap. I, § 2, prop. 2), le faisceau $\bigoplus_W R_U$ est plat.

1.3. Corollaire. *Tout faisceau $\mathscr{F}$ sur X admet une résolution plate $\mathscr{P}_\bullet \to \mathscr{F} \to 0$.*

1.4. Soit X et Y deux espaces localement compacts. Considérons une application continue $f\colon X \to Y$ telle que le foncteur $f_!$ soit de dimension cohomologique finie.

Proposition. *Soit $\mathscr{K}$ un faisceau sur X, $f_!$-mou et plat. Alors pour tout faisceau $\mathscr{A}$ sur X, le faisceau $\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}$ est $f_!$-mou.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.3 on peut trouver une résolution $\mathscr{P}_\bullet \to \mathscr{A} \to 0$ de $\mathscr{A}$ par des faisceaux de la forme $\mathscr{P}_j = \bigoplus_{W_j} R_U (j \geq 0)$. Comme $\mathscr{K}$ est plat la suite $\mathscr{P}_\bullet \otimes \mathscr{K} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{K} \to 0$ est une résolution de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}$. Supposons que la dimension cohomologique de $f_!$ est inférieure à n et posons $\mathscr{B} = \mathrm{Ker}(d_n \otimes 1_{\mathscr{K}})$. Alors la suite

$$0 \to \mathscr{B} \to \mathscr{P}_n \otimes \mathscr{K} \to \dots \to \mathscr{P}_0 \otimes \mathscr{K} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{K} \to 0$$

est une résolution bornée du faisceau $\mathscr{B}$. Comme $\mathscr{K}$ est $f_!$-mou, les faisceaux

$\mathscr{P}_j \otimes \mathscr{K} = \bigoplus_{W_j} R_U \otimes \mathscr{K} = \bigoplus_{W_j} \mathscr{K}_U (0 \leqslant j \leqslant n)$ sont $f_!$-mous ([Gr], lemme 2.10). L'argument standard utilisé dans ([Gr], th. 2.12) montre que $\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}$ est $f_!$-mou.

1.5. THÉORÈME. *Supposons que l'anneau R est noethérien. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau plat sur X. Alors $\mathscr{F}$ admet une $f_!$-résolution $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{K}^\bullet$, dans laquelle les faisceaux $\mathscr{K}^j$ sont plats $(j \geqslant 0)$.*

Démonstration. Soit $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^\bullet$ la résolution flasque canonique de $\mathscr{F}$ ([Go], chap. II, 4.3) et posons $\mathscr{Z}^j = \operatorname{Coker}(d: \mathscr{C}^{j-1} \to \mathscr{C}^j)$ $(j \geqslant 1)$. Supposons que la dimension cohomologique de $f_!$ est inférieure à n. Alors la suite exacte

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1 \to \ldots \to \mathscr{C}^n \to \mathscr{Z}^{n+1} \to 0$$

est une $f_!$-résolution de $\mathscr{F}$. En effet les faisceaux $\mathscr{C}^j$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ étant flasques, ils sont $f_!$-mous ([Br], chap. II, coroll. 2.5 et [Gr], lemme 2.10) et par un argument standard ([Gr], th. 2.12) le faisceau $\mathscr{Z}^{n+1}$ est aussi $f_!$-mou.

Il reste donc à montrer que les faisceaux $\mathscr{C}^j$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ et $\mathscr{Z}^{n+1}$ sont plats.

La construction de la résolution flasque étant inductive, il suffit de démontrer par récurrence que, pour tout entier $j \geqslant 0$, les faisceaux $\mathscr{C}^j$ et $\mathscr{Z}^{j+1}$ sont plats.

Pour tout $U \in \operatorname{Ouv}(X)$ on a $\mathscr{C}^0(U) = \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x$. Par hypothèse les modules $\mathscr{F}_x$ sont plats sur l'anneau noethérien R, donc $\mathscr{C}^0(U)$ est un module plat (voir Appendice A). Il en résulte que pour tout $x \in X$ le module $\mathscr{C}^0_x = \varinjlim_{U \in \mathscr{V}_x} \mathscr{C}^0(U)$ est plat ([Bo2], chap. I, § 2, prop. 2) et par suite $\mathscr{C}^0$ est un faisceau plat.

De plus considérons la suite exacte scindée ([Br], chap. II, § 2)

$$0 \to \mathscr{F}_x \to \mathscr{C}^0_x \to \mathscr{Z}^1_x \to 0$$

dans laquelle les deux premiers termes sont des modules plats. Alors le module $\mathscr{Z}^1_x$ est aussi plat ([Bo2], chap. I, § 2, prop. 2) donc le faisceau $\mathscr{Z}^1$ est plat.

Maintenant supposons que les faisceaux $\mathscr{C}^q$ et $\mathscr{Z}^{q+1}$ sont plats pour $0 \leqslant q \leqslant p-1$ avec $p \geqslant 1$. On a $\mathscr{C}^p(U) = \prod_{x \in U} \mathscr{Z}^p_x$. Par hypothèse de récurrence les modules $\mathscr{Z}^p_x$ sont plats, donc le même argument que précédemment montre que le faisceau $\mathscr{C}^p$ est plat et en considérant la suite exacte scindée

$$0 \to \mathscr{Z}^p_x \to \mathscr{C}^p_x \to \mathscr{Z}^{p+1}_x \to 0$$

on en déduit que le faisceau $\mathscr{Z}^{p+1}$ est plat.

1.6. Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces localement compacts, telle que le foncteur $f_!$ soit de dimension cohomologique finie et soit $\mathscr{K}$ un faisceau sur X qui soit $f_!$-mou et plat. La composition des foncteurs

$$Sh(X) \xrightarrow{-\otimes\mathscr{K}} Sh(X) \xrightarrow{f_!} Sh(Y)$$

définit un foncteur $f_!^{\mathscr{K}} : Sh(X) \to Sh(Y)$ qui commute aux sommes directes puisque chacun des foncteurs qui le compose commute aux sommes directes ([Gr], th. 2.15).

1.7. Proposition. *Le foncteur* $f_!^{\mathscr{K}}$ *est exact.*

Démonstration. Soit $0 \to \mathscr{A}' \to \mathscr{A} \to \mathscr{A}'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux sur X. Comme $\mathscr{K}$ est plat la suite

$$0 \to \mathscr{A}' \otimes \mathscr{K} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{K} \to \mathscr{A}'' \otimes \mathscr{K} \to 0$$

est exacte et formée de faisceaux $f_!$-mous en vertu de la proposition 1.4. Il résulte alors des propriétés du foncteur $R^i f_!$ que la suite

$$0 \to f_!(\mathscr{A}'\otimes\mathscr{K}) \to f_!(\mathscr{A}\otimes\mathscr{K}) \to f_!(\mathscr{A}''\otimes\mathscr{K}) \to 0$$

est exacte.

1.8. Rappelons que le foncteur

$$f^!_{\mathscr{K}} : Sh(Y) \to Sh(X)$$

est défini de la façon suivante ([Gr], § 3): pour tout faisceau $\mathscr{B}$ sur Y et pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ on pose

$$f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})(U) = \mathrm{Hom}\big(f_!(\mathscr{K}_U); \mathscr{B}\big).$$

Il est évident que le foncteur $f^!_{\mathscr{K}}$ est exact gauche et qu'il commute aux produits directs.