3. L'ISOMORPHISME

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.07.2024**

2.7. La construction du morphisme λ et la démonstration du théorème fera l'objet du paragraphe 3.

2.8. COROLLAIRE. *Le foncteur* $f^!_{\mathscr{K}} : Sh(Y) \to Sh(X)$ *est adjoint à droite au foncteur* $f^{\mathscr{K}}_! : Sh(X) \to Sh(Y)$.

Démonstration. En effet prenons les sections globales dans l'isomorphisme du théorème 2.6. On obtient ainsi un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{Sh(Y)}(f^{\mathscr{K}}_!(\mathscr{A});\mathscr{B}) = \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(\mathscr{A};f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}))$$

2.9. COROLLAIRE. *Le foncteur* $f^!_{\mathscr{K}} : Sh(Y) \to Sh(X)$ *se restreint à un foncteur* $f^!_{\mathscr{K}} : \mathrm{Inj}(Y) \to \mathrm{Inj}(X)$.

Démonstration. Soit $0 \to \mathscr{A}' \to \mathscr{A} \to \mathscr{A}'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux sur X et soit $\mathscr{J}$ un faisceau injectif sur Y. En appliquant successivement à cette suite les foncteurs exacts $f^{\mathscr{K}}_!$ et $\mathrm{Hom}_{Sh(Y)}(- ;\mathscr{J})$, puis en utilisant l'isomorphisme du corollaire 2.8, on obtient une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(\mathscr{A}'';f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{J})) &\to \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(\mathscr{A};f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{J})) \\ &\to \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(\mathscr{A}';f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{J})) \to 0 . \end{aligned}$$

Il en résulte que le faisceau $f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{J})$ est injectif.

3. L'ISOMORPHISME λ

3.1. On reprend les hypothèses du N° 2.1. Le résultat suivant permet de simplifier la construction de λ en passant d'une situation locale à une situation globale.

LEMME. *Soit* $W \in \mathrm{Ouv}(Y)$: *posons* $W' = f^{-1}(W)$ *et considérons le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} W' & \xrightarrow{j'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ W & \xrightarrow[j]{} & Y \end{array}$$

où j *et* j' *sont des inclusions et* f' *est la restriction de* f *à* W'. *Alors* $f'_!$ *est de dimension cohomologique finie et si* $\mathscr{K}$ *est un faisceau sur* X $f_!$*-mou et plat alors* $j'^*\mathscr{K}$ *est* $f'_!$*-mou et plat.*

De plus si $\mathscr{A} \in Sh(X)$ *et* $\mathscr{B} \in Sh(Y)$ *on a des isomorphismes canoniques*

$$j^* f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}) = f'^{\,j'^*\mathscr{K}}_!(j'^*\mathscr{A}), \tag{3.1.1}$$

$$j'^* f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}) = f'^{\,!}_{j'^*\mathscr{K}}(j^*\mathscr{B}). \tag{3.1.2}$$

Démonstration. Il est évident que $f'_!$ est de dimension cohomologique finie. Pour tout $x \in W'$ on a $(j'^*\mathscr{K})_x = \mathscr{K}_x$ donc d'après 1.1 le faisceau $j'^*\mathscr{K}$ est plat. Enfin pour tout $y \in W$ on a $(j'^*\mathscr{K})_{|f'^{-1}(y)} = \mathscr{K}_{|f^{-1}(y)}$; il résulte alors de ([Gr] 2.8) que $j'^*\mathscr{K}$ est $f'_!$-mou.

On a $j'^*(\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}) = j'^*\mathscr{A} \otimes j'^*\mathscr{K}$, donc pour démontrer (3.1.1) il suffit de démontrer que pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur X on a

$$j^* f_!(\mathscr{F}) = f'_!(j'^*\mathscr{F}).$$

Or pour tout $y \in W$ on a, d'après ([Gr], prop. 2.6),

$$\begin{aligned} j^* f_!(\mathscr{F})_y &= f_!(\mathscr{F})_y = \Gamma_c(f^{-1}(y); \mathscr{F}_{|f^{-1}(y)}) \\ &= \Gamma_c(f'^{-1}(y); (j'^*\mathscr{F})_{|f'^{-1}(y)}) = f'_!(j'^*\mathscr{F})_y \end{aligned}$$

Maintenant soit $U \in \mathrm{Ouv}(W') \subset \mathrm{Ouv}(X)$. On a évidemment $(j'^*\mathscr{K})_U = j'^*(\mathscr{K}_U)$ et d'après (3.1.1) on a $f'_!(j'^*\mathscr{K}_U) = j^* f_!(\mathscr{K}_U)$. Donc pour démontrer (3.1.2) il suffit de démontrer que

$$\mathrm{Hom}(f_!(\mathscr{K}_U); \mathscr{B}) = \mathrm{Hom}(j^* f_!(\mathscr{K}_U); j^*\mathscr{B}).$$

Mais cet isomorphisme est évident car d'après ([Gr], prop. 2.6) le support du faisceau $f_!(\mathscr{K}_U)$ est contenu dans W.

3.2. Pour définir un morphisme de faisceaux

$$\lambda_{A,\mathscr{B}}: \mathscr{H}om(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}) \to f_*\mathscr{H}om(\mathscr{A}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}))$$

il faut construire une famille $\{\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(W)\}_{W \in \mathrm{Ouv}(Y)}$ de morphismes

$$\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(W): \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A})_{|W}; \mathscr{B}_{|W}) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{A}_{|f^{-1}(W)}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})_{|f^{-1}(W)})$$

qui soient compatibles avec les morphismes de restriction.

Compte tenu du lemme 3.1 il suffit donc de définir pour toute application $f: X \to Y$ et pour tout faisceau $\mathscr{K}$ sur X qui satisfont les hypothèses du N° 2.1, un morphisme (que par abus on note encore λ)

$$\lambda: \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{A}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}))$$

qui vérifie la condition suivante:

(3.2.1) Si $W \in \mathrm{Ouv}(Y)$ et si on pose, avec les notations du lemme 3.1, $\mathscr{A}' = j'^*\mathscr{A}$, $\mathscr{K}' = j'^*\mathscr{K}$ et $\mathscr{B}' = j^*\mathscr{B}$, alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}) & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{Hom}(\mathscr{A}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(f_!'^{\mathscr{K}'}(\mathscr{A}'); \mathscr{B}') & \xrightarrow[\lambda']{} & \mathrm{Hom}(\mathscr{A}'; f'^!_{\mathscr{K}'}(\mathscr{B}')) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont les morphismes naturels de restriction.

3.3. L'existence du morphisme λ du théorème 2.6. est donc contenue dans le résultat plus précis suivant, dont la démonstration sera donnée au N° 3.7.

PROPOSITION. *Pour toute application* $f: X \to Y$ *et tout faisceau* $\mathscr{K}$ *sur* X *qui satisfont les hypothèses du N° 2.1, il existe un morphisme de bifoncteurs*

$$\lambda: \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(-); -) \to \mathrm{Hom}(- ; f^!_{\mathscr{K}}(-))$$

qui vérifie la condition (3.2.1).

De plus on a les propriétés suivantes:

(3.3.1) *Si* $\mathscr{A} = \bigoplus_{j\in J} \mathscr{A}_j$ *alors* $\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}} = \prod_{j\in J} \lambda_{\mathscr{A}_j,\mathscr{B}}$.

(3.3.2) *Si* $\mathscr{B} = \prod_{i\in I} \mathscr{B}_i$ *alors* $\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}} = \prod_{i\in I} \lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}_i}$.

3.4. Le fait fondamental qui permet de construire explicitement λ est formulé de la façon suivante.

LEMME. *Pour tout* $\mathscr{A} \in Sh(X)$ *il existe une famille*

$$\mu_{\mathscr{A}} = \{\mu(U, V)\}_{(U,V)\in \mathrm{Ouv}(X)\times \mathrm{Ouv}(Y)}$$

de morphismes

$$\mu(U, V): \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V) \to f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A})(V)$$

qui vérifie les propriétés suivantes:

(3.4.1) *Si* $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ *et* $V' \subset V \in \mathrm{Ouv}(Y)$ *alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V) & \xrightarrow{\mu(U,V)} & f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A})(V) \\ 1_{\mathscr{A}(U)} \otimes \rho_{V',V} \downarrow & & \downarrow \rho_{V',V} \\ \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V') & \xrightarrow[\mu(U,V')]{} & f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A})(V') \end{array}$$

est commutatif

(3.4.2) *Si* $U' \subset U \in \mathrm{Ouv}(X)$ *et* $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$ *alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_{U'})(V) & \xrightarrow{1_{\mathscr{A}(U)} \otimes \bar{r}_{U',U}(V)} & \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V) \\ \rho_{U',U} \otimes 1_{f_!(\mathscr{K}_{U'})(V)} \downarrow & & \downarrow \mu(U,V) \\ \mathscr{A}(U') \otimes f_!(\mathscr{K}_{U'})(V) & \xrightarrow[\mu(U',V)]{} & f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A})(V) \end{array}$$

(où $\bar{r}_{U',U}$ *est le morphisme induit par le morphisme canonique d'extension* $r_{U',U}\colon \mathscr{K}_{U'} \to \mathscr{K}_U$*) est commutatif.*

(3.4.3) $\mu_{\mathscr{A}}$ *est fonctoriel par rapport à* $\mathscr{A}$.

(3.4.4) *Si* $\mathscr{A} = \bigoplus_{j\in J} \mathscr{A}_j$ *alors* $\mu_{\mathscr{A}} = \bigoplus_{j\in J} \mu_{\mathscr{A}_j}$.

Démonstration. Il suffit de définir, pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$, une application bilinéaire

$$\mu(U;V)\colon \mathscr{A}(U) \times f_!(\mathscr{K}_U)(V) \to f_!(\mathscr{A}\otimes\mathscr{K})(V).$$

Rappelons que $\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}$ est le faisceau des sections de l'espace étalé $\mathscr{L}(\mathscr{A}\otimes\mathscr{K}) = \coprod_{x\in X} \mathscr{A}_x \otimes \mathscr{K}_x$.

Soit $t \in f_!(\mathscr{K}_U)(V) = \Gamma_{\Phi_V}(f^{-1}(V); \mathscr{K}_U)$. Donc $t \in \Gamma(U \cap f^{-1}(V); \mathscr{K})$; de plus le support $|t|$ de t est fermé dans $f^{-1}(V)$ et l'application $f_{||t|}\colon |t| \to V$ est propre.

Soit encore $s \in \mathscr{A}(U)$. Considérons l'application

$$\bar{r}\colon U \cap f^{-1}(V) \to \mathscr{L}(\mathscr{A}\otimes\mathscr{K})$$

définie en posant, pour tout $x \in U \cap f^{-1}(V)$,

$$\bar{r}(x) = \rho_{U\cap f^{-1}(V),U}(s)_x \otimes t_x$$

On a donc $\tilde{r} \in \Gamma(U \cap f^{-1}(V); \mathscr{A} \otimes \mathscr{K})$ ([T]; chap. 4, 4.9). Comme

$$|\tilde{r}| \subset |\rho_{U \cap f^{-1}(V), U}(s)| \cap |t| \subset |t|,$$

le support $|\tilde{r}|$ de $\tilde{r}$ est fermé dans $f^{-1}(V)$, si bien qu'on peut étendre $\tilde{r}$ par zéro sur $f^{-1}(V) \backslash U \cap f^{-1}(V)$ pour obtenir une section

$$r \in \Gamma(f^{-1}(V); \mathscr{A} \otimes \mathscr{K}).$$

Soit un compact $K \subset V$; alors $f_{||r|}^{-1}(K)$ est compact car

$$f_{||r|}^{-1}(K) = \left(f^{-1}(K) \cap |t|\right) \cap |r|$$

et $f^{-1}(K) \cap |t|$ est compact par hypothèse. Il en résulte que

$$r \in \Gamma_{\Phi_V}(f^{-1}(V); \mathscr{A} \otimes \mathscr{K}) = f_!(\mathscr{A} \otimes \mathscr{K})(V).$$

On définit alors l'application bilinéaire $\mu(U, V)$ en posant

$$\mu(U, V)(s; t) = r$$

Les propriétés (3.4.1), (3.4.2), (3.4.3) et (3.4.4) se vérifient par calculs directs à partir de cette définition.

3.5. Désignons par

$$\prod{}' \operatorname{Hom}(\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V))$$

le sous-espace de

$$\prod_{(U, V) \in \operatorname{Ouv}(X) \times \operatorname{Ouv}(Y)} \operatorname{Hom}(\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V))$$

des familles de morphismes

$$\psi(U, V): \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V) \to \mathscr{B}(V)$$

qui vérifient les conditions suivantes:

(3.5.1) Si $U \in \operatorname{Ouv}(X)$ et $V' \subset V \in \operatorname{Ouv}(Y)$ alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V) & \xrightarrow{\psi(U, V)} & \mathscr{B}(V) \\
1_{\mathscr{A}(U)} \otimes \rho_{V', V} \downarrow & & \downarrow \rho_{V', V} \\
\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V') & \xrightarrow[\psi(U, V')]{} & \mathscr{B}(V')
\end{array}$$

est commutatif.

(3.5.2) Si $U' \subset U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$ alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_{U'})(V) \arrow[r, "1_{\mathscr{A}(U)} \otimes \bar{r}_{U',U}(V)"] \arrow[d, "\rho_{U',U} \otimes 1_{f_!(\mathscr{K}_{U'})(V)}"'] & \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V) \arrow[d, "\psi(U,V)"] \\
\mathscr{A}(U') \otimes f_!(\mathscr{K}_{U'})(V) \arrow[r, "\psi(U',V)"'] & \mathscr{B}(V)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

3.6. LEMME. *Pour tout* $\mathscr{A} \in Sh(X)$ *et* $\mathscr{B} \in Sh(Y)$ *il existe un isomorphisme*

$$\Psi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}: \mathrm{Hom}(\mathscr{A}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})) \to \prod{}' \mathrm{Hom}(\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V))$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

(3.6.1) $\Psi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ *est fonctoriel par rapport à* $\mathscr{A}$ *et à* $\mathscr{B}$.

(3.6.2) *Si* $\mathscr{A} = \bigoplus_{j\in J} \mathscr{A}_j$ *alors* $\Psi_{\mathscr{A},\mathscr{B}} = \prod_{j\in J} \Psi_{\mathscr{A}_j,\mathscr{B}}$.

(3.6.3) *Si* $\mathscr{B} = \prod_{i\in I} \mathscr{B}_i$ *alors* $\Psi_{\mathscr{A},\mathscr{B}} = \prod_{i\in I} \Psi_{\mathscr{A},\mathscr{B}_i}$.

Démonstration. Par définition un morphisme $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}))$ consiste en une famille

$$\{\psi(U)\}_{U\in\mathrm{Ouv}(X)} \in \prod_{U\in\mathrm{Ouv}(X)} \mathrm{Hom}(\mathscr{A}(U); \mathrm{Hom}(f_!(\mathscr{K}_U); \mathscr{B}))$$

de morphismes compatibles avec les morphismes de restriction et si $s \in \mathscr{A}(U)$ alors $\psi(U)(s)$ est une famille

$$\{\psi(U)(s)(V)\}_{V\in\mathrm{Ouv}(Y)} \in \prod_{V\in\mathrm{Ouv}(Y)} \mathrm{Hom}(f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V))$$

de morphismes compatibles avec les morphismes de restriction. Pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$ on définit un morphisme

$$\bar{\psi}(U,V) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A}(U); \mathrm{Hom}(f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V))$$

en posant $\bar{\psi}(U,V)(s) = \psi(U)(s)(V)$ pour tout $s \in \mathscr{A}(U)$. De plus on a un isomorphisme canonique

$$\Phi(U,V): \mathrm{Hom}(\mathscr{A}(U); \mathrm{Hom}(f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V))$$
$$\to \mathrm{Hom}(\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V)).$$

On pose alors $\psi(U, V) = \Phi(U, V)\big(\bar{\psi}(U, V)\big)$. Les conditions (3.5.1) et (3.5.2) sont satisfaites.

En effet la condition (3.5.1) est équivalente à la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} f_!(\mathscr{K}_U)(V) & \xrightarrow{\bar{\psi}(U, V)(s)} & \mathscr{B}(V) \\ \rho_{V',V} \downarrow & & \downarrow \rho_{V',V} \\ f_!(\mathscr{K}_U)(V') & \xrightarrow[\bar{\psi}(U, V')(s)]{} & \mathscr{B}(V') \end{array}$$

et cette commutativité résulte des conditions de compatibilité des morphismes $\psi(U)(s)(V)$.

De même la condition (3.5.2) est équivalente à la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}(U) & \xrightarrow{\bar{\psi}(U, V)} & \mathrm{Hom}\big(f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V)\big) \\ \rho_{U',U} \downarrow & & \downarrow \ \mathrm{Hom}\big(\bar{r}_{U',U}(V); 1_{\mathscr{B}(V)}\big) \\ \mathscr{A}(U') & \xrightarrow[\bar{\psi}(U', V)]{} & \mathrm{Hom}\big(f_!(\mathscr{K}_{U'})(V); \mathscr{B}(V)\big) \end{array}$$

et cette commutativité résulte des conditions de compatibilité des morphismes $\psi(U)$.

On peut donc définir le morphisme $\Psi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ en posant

$$\Psi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(\psi) = \{\psi(U, V)\}_{(U, V) \in \mathrm{Ouv}(X) \times \mathrm{Ouv}(Y)}$$

Les propriétés (3.6.1), (3.6.2) et (3.6.3) se vérifient immédiatement par calculs directs.

On obtient le morphisme réciproque de $\Psi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ en associant à la famille

$$\{\psi(U, V)\}_{(U, V) \in \mathrm{Ouv}(X) \times \mathrm{Ouv}(Y)} \in \prod{}' \mathrm{Hom}\big(\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V)\big)$$

le morphisme de faisceaux $\psi : \mathscr{A} \to f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})$, défini en posant, pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $s \in \mathscr{A}(U)$, $\psi(U)(s) = \psi_s(U)$ où $\psi_s(U) : f_!(\mathscr{K}_U) \to \mathscr{B}$ est le morphisme de faisceaux donné, pour tout $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$, par

$$\psi_s(U)(V) = \Phi(U, V)^{-1}\big(\psi(U, V)\big)(s).$$

3.7. *Démonstration de la proposition 3.3.* Si $\mathscr{A} \in Sh(X)$ et $\mathscr{B} \in Sh(Y)$ on définit un morphisme

$$\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}}: \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{A}; f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B}))$$

de la façon suivante. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B})$; pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$ considérons le morphisme

$$\psi(U, V) = \varphi(V) \circ \mu(U, V): \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V) \to \mathscr{B}(V),$$

où $\mu(U, V)$ est le morphisme défini dans le lemme 3.4. Il résulte immédiatement des propriétés (3.4.1) et (3.4.2) et des conditions de compatibilité des morphismes $\varphi(V)$, que les morphismes $\psi(U, V)$ satisfont les conditions (3.5.1) et (3.5.2). On peut donc poser

$$\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(\varphi) = \Psi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}^{-1}\left(\{\psi(U, V)\}_{(U,V)\in \mathrm{Ouv}(X)\times \mathrm{Ouv}(Y)}\right).$$

Plus explicitement, si $U \in \mathrm{Ouv}(X)$, $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$, $s \in \mathscr{A}(U)$ et $t \in f_!(\mathscr{K}_U)(V)$ on a

$$\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(\varphi)(U)(s)(V)(t) = \varphi(V) \circ \mu(U, V)(s; t).$$

De cette dernière formule il découle facilement que la condition de compatibilité (3.2.1) est satisfaite si on remarque que par définition on a

$$f'^{\mathscr{K}'}_!(\mathscr{A}')(V) = f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A})(V)$$

pour tout $V \in \mathrm{Ouv}(W) \subset \mathrm{Ouv}(Y)$

et
$$f'^!_{\mathscr{K}'}(\mathscr{B}')(U) = f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})(U)$$

pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(W') \subset \mathrm{Ouv}(X)$.

La bifonctorialité de λ est une conséquence de (3.4.3) et (3.6.1). De plus les propriétés (3.3.1) et (3.3.2) sont des conséquences de (3.4.3), (3.6.2) et (3.6.3).

3.8. Il faut montrer maintenant que le morphisme de faisceaux

$$\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}}: \mathscr{H}om(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}) \to f_*\mathscr{H}om(\mathscr{A}; f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B}))$$

est un isomorphisme. D'après le N° 3.2 il suffit donc de montrer que le morphisme

$$\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}} : \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A});\mathscr{B}) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{A}, f_{\mathscr{K}}^!;(\mathscr{B}))$$

est un isomorphisme. On commence par considérer le cas où $\mathscr{A} = R_U$. On note λ le morphisme $\lambda_{R_U,\mathscr{B}}$ défini dans la proposition 3.3.

3.9. LEMME. *Pour tout ouvert U de X, le morphisme*

$$\lambda : \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(R_U);\mathscr{B}) \to \mathrm{Hom}(R_U; f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B}))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. L'isomorphisme canonique $g : \mathscr{K}_U \to R_U \otimes \mathscr{K}$ ([Go] chap. II, 2.9) induit un isomorphisme $g : \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(R_U);\mathscr{B}) \to f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B})(U)$. D'après ([Go], chap. II, Remarque 2.9.1) on a aussi un isomorphisme canonique $h : \mathrm{Hom}(R_U; f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B})) \to f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B})(U)$. Pour démontrer que λ est un isomorphisme, il suffit donc de démontrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(R_U);\mathscr{B}) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathrm{Hom}(R_U; f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B})) \arrow[dl, "h"] \\
& f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B})(U) &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Notons 1 la section unité de R_U au-dessus de U. Soit $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$ et $t \in f_!(\mathscr{K}_U)(V)$. Il est immédiat, d'après les définitions, que l'on a

$$\mu(U, V)(1; t) = g(f^{-1}(V))(t)$$

Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(R_U);\mathscr{B})$. On a alors, compte tenu de la formule du N° 3.7,

$$\begin{aligned} h(\lambda(\varphi))(V)(t) &= \lambda(\varphi)(U)(1)(V)(t) = \varphi(V) \circ \mu(U, V)(1; t) \\ &= \varphi(V) \circ g(f^{-1}(V))(t) = g(\varphi)(V)(t); \end{aligned}$$

ainsi on a $h \circ \lambda = g$.

3.10. PROPOSITION. *Pour tout $\mathscr{A} \in Sh(X)$ et tout $\mathscr{B} \in Sh(Y)$ le morphisme*

$$\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}} : \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A});\mathscr{B}) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{A}; f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B}))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. La démonstration se fait en trois étapes.

i) Soit $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et supposons que $\mathscr{A} = R_U$; alors $\lambda_{R_U, \mathscr{B}}$ est un isomorphisme d'après le lemme 3.9.

ii) Supposons que $\mathscr{A} = \bigoplus R_U$. D'après (3.3.1) on a $\lambda_{\mathscr{A}, \mathscr{B}} = \Pi \lambda_{R_U, \mathscr{B}}$; donc $\lambda_{\mathscr{A}, \mathscr{B}}$ est un isomorphisme d'après l'étape i).

iii) Soit $\mathscr{A}$ un faisceau sur X.

D'après le corollaire 1.3 on peut trouver une suite exacte

$$\mathscr{Q} \to \mathscr{P} \to \mathscr{A} \to 0$$

où les faisceaux $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont de la forme $\bigoplus R_U$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathscr{A}, \mathscr{B}}} & \mathrm{Hom}(\mathscr{A}; f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{P}); \mathscr{B}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathscr{P}, \mathscr{B}}} & \mathrm{Hom}(\mathscr{P}; f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{Q}); \mathscr{B}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathscr{Q}, \mathscr{B}}} & \mathrm{Hom}(\mathscr{Q}; f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B}))
\end{array}$$

Les colonnes de ce diagramme sont exactes car les foncteurs $\mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(-); \mathscr{B})$ et $\mathrm{Hom}(- ; f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B}))$ sont exacts gauche. Les deux flèches $\lambda_{\mathscr{P}, \mathscr{B}}$ et $\lambda_{\mathscr{Q}, \mathscr{B}}$ sont des isomorphismes en vertu de l'étape ii). On en déduit alors aisément que $\lambda_{\mathscr{A}, \mathscr{B}}$ est un isomorphisme.

3.11. Corollaire. *Pour tout $\mathscr{A} \in Sh(X)$ et tout $\mathscr{B} \in Sh(Y)$ le morphisme de faisceaux*

$$\lambda_{\mathscr{A}, \mathscr{B}} : \mathscr{H}om(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}) \to f_* \mathscr{H}om(\mathscr{A}; f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B}))$$

est un isomorphisme.