4. Le théorème de dualité

4. Le théorème de dualité

4.1. Soit $f: X \to Y$ une application continue entre espaces localement compacts telle que le foncteur $f_!$ soit de dimension cohomologique finie.

Supposons pour toute la suite de ce paragraphe que l'anneau R est noethérien. D'après le théorème 1.5 on peut trouver une $f_!$-résolution $0 \to R_X \to \mathscr{K}^\bullet$ du faisceau R_X par des faisceaux plats.

4.2. Si $\mathscr{A}^\bullet \in \mathrm{Ob}K(X)$ on définit un complexe double $f_!^{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{A}^\bullet)$ en posant $[f_!^{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{A}^\bullet)]^{p,q} = f_!^{\mathscr{K}^p}(\mathscr{A}^q)$, les différentielles étant induites par celles de $\mathscr{K}^\bullet$ et de $\mathscr{A}^\bullet$ respectivement. En prenant le complexe simple associé on en déduit un foncteur, encore noté $f_!^{\mathscr{K}^\bullet}$, de $K(X)$ dans $K(Y)$.

Si $\mathscr{B}^\bullet \in \mathrm{Ob}K(Y)$ on peut encore définir un complexe triple

$$\mathscr{H}om(f_!^{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{A}^\bullet); \mathscr{B}^\bullet)$$

en posant

$$[\mathscr{H}om(f_!^{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{A}^\bullet); \mathscr{B}^\bullet)]^{p,q,r} = \mathscr{H}om(f_!^{\mathscr{K}^{-p}}(\mathscr{A}^{-q}); \mathscr{B}^r),$$

les différentielles étant induites par celle de $\mathscr{K}^\bullet$, de $\mathscr{A}^\bullet$ et de $\mathscr{B}^\bullet$ respectivement. Le complexe simple associé à ce complexe triple est canoniquement isomorphe au complexe simple associé au complexe double des homomorphismes du complexe simple associé au complexe double $f_!^{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{A}^\bullet)$ dans le complexe $\mathscr{B}^\bullet$.

4.3. D'une façon analogue on définit un complexe double $f^!_{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{B}^\bullet)$ en posant $[f^!_{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{B}^\bullet)]^{p,q} = f^!_{\mathscr{K}^{-p}}(\mathscr{B}^q)$. En prenant le complexe simple associé on en déduit un foncteur, encore noté $f^!_{\mathscr{K}^\bullet}$, de $K(Y)$ dans $K(X)$.

On peut aussi définir le complexe triple $\mathscr{H}om(\mathscr{A}^\bullet; f^!_{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{B}^\bullet))$ en posant

$$[\mathscr{H}om(\mathscr{A}^\bullet; f^!_{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{B}^\bullet))]^{p,q,r} = \mathscr{H}om(\mathscr{A}^{-q}; f^!_{\mathscr{K}^{-p}}(\mathscr{B}^r)).$$

Le complexe simple associé à ce complexe triple est canoniquement isomorphe au complexe simple associé au complexe double des homomorphismes du complexe $\mathscr{A}^\bullet$ dans le complexe simple associé au complexe double $f^!_{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{B}^\bullet)$.

4.4. Proposition. *Il existe un isomorphisme de complexes de faisceaux sur* Y

$$\lambda^\bullet : \mathscr{H}om^\bullet(f_!^{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{A}^\bullet); \mathscr{B}^\bullet) \to f_*\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{A}^\bullet; f^!_{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{B}^\bullet)).$$

Démonstration. Le corollaire 3.11 fournit, pour tout $(p, q, r) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, un isomorphisme

$$\lambda^{p,q,r}: [\mathscr{H}om(f_!^{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{A}^\bullet); \mathscr{B}^\bullet)]^{p,q,r} \to [f_*\mathscr{H}om(\mathscr{A}^\bullet; f^!_{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{B}^\bullet))]^{p,q,r},$$

compatibles avec les différentielles. On en déduit un isomorphisme de complexes triples. En passant aux complexes simples associés on obtient l'isomorphisme $\lambda^\bullet$.

4.5. Rappelons ([Gr], corollaire 3.10) qu'on définit le foncteur $f^!$ comme étant le foncteur dérivé du foncteur $f^!_{\mathscr{K}^\bullet}$.

4.6. THÉORÈME. *Soit* $\mathscr{A}^\bullet$ *un objet de la catégorie dérivée* $D^-(X)$ *et* $\mathscr{B}^\bullet$ *un objet de la catégorie dérivée* $D^b(Y)$*. Dans la catégorie* $D^+(Y)$ *on a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om^\bullet(\mathbf{R}f_!(\mathscr{A}^\bullet); \mathscr{B}^\bullet) = \mathbf{R}f_*\mathbf{R}\,\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{A}^\bullet; f^!(\mathscr{B}^\bullet)).$$

Démonstration. Soit $\mathscr{A}^\bullet \in \mathrm{Ob}D^-(X)$ et soit $0 \to R_X \to \mathscr{K}^\bullet$ une $f_!$-résolution du faisceau constant R_X par des faisceaux plats (théorème 1.5). On a $\mathscr{A}^\bullet \otimes R_X = \mathscr{A}^\bullet$ donc $0 \to \mathscr{A}^\bullet \to \mathscr{A}^\bullet \otimes \mathscr{K}^\bullet$ est une résolution de $\mathscr{A}^\bullet$ par des faisceaux $f_!$-mous (proposition 1.4) donc $f_!$-acycliques ([Gr] lemme 2.10).

Comme par hypothèse $f_!$ est de dimension cohomologique finie le foncteur $\mathbf{R}f_!: D(X) \to D(Y)$ existe et est donné par $\mathbf{R}f_!(\mathscr{A}^\bullet) = f_!^{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{A}^\bullet)$; il induit un foncteur $\mathbf{R}f_!: D^-(X) \to D^-(Y)$ ([H] chap. I, corollaire 5.3).

Maintenant soit $\mathscr{B}^\bullet \in \mathrm{Ob}D^b(Y)$ et soit $0 \to \mathscr{B}^\bullet \to \mathscr{J}^\bullet$ une résolution injective de $\mathscr{B}^\bullet$. On a évidemment

$$\mathbf{R}(\mathscr{H}om^\bullet \circ (f_! \times 1_{K^b(Y)})) = \mathbf{R}\,\mathscr{H}om^\bullet \circ (\mathbf{R}f_! \times 1_{D^b(Y)})$$

donc ([H] chap. I, § 6).

(4.6.1) $$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om^\bullet(\mathbf{R}f_!\mathscr{A}^\bullet; \mathscr{B}^\bullet) = \mathscr{H}om^\bullet(f_!^{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{A}^\bullet); \mathscr{J}^\bullet).$$

D'un autre côté les faisceaux $f^!_{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{J}^\bullet)$ sont injectifs (corollaire 2.9), donc les faisceaux $\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{A}^\bullet; f^!_{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{J}^\bullet))$ et $f_*\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{A}^\bullet; f^!_{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{J}^\bullet))$ sont flasques ([Go] chap. II, lemme 7.3.2 et théorème 3.1.1). On a ainsi ([H], chap. I, prop. 5.4)

$$\mathbf{R}(f_* \circ \mathscr{H}om^\bullet \circ (1_{K(X)} \times f^!_{\mathscr{K}^\bullet})) = \mathbf{R}f_* \circ \mathbf{R}\,\mathscr{H}om^\bullet \circ (1_{D(X)} \times \mathbf{R}f^!_{\mathscr{K}^\bullet}).$$

Donc

(4.6.2) $$\mathbf{R}f_*\mathbf{R}\,\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{A}^\bullet; f^!(\mathscr{B}^\bullet)) = f_*\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{A}^\bullet; f^!_{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{J}^\bullet)).$$

Le théorème résulte alors du fait que les membres de droite des égalités (4.6.1) et (4.6.2) sont isomorphes en vertu de la proposition 4.4.

4.7. Appliquons le théorème 4.6 au cas où $\mathscr{A}^\cdot = f^!(\mathscr{B}^\cdot)$. Comme les foncteurs f_* et $\mathscr{H}om$ sont exacts gauche, en appliquant le foncteur cohomologique H^0, puis en prenant les sections globales, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{D^b(Y)}(\mathbf{R}f_!(f^!(\mathscr{B}^\cdot)); \mathscr{B}^\cdot) = \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(f^!(\mathscr{B}^\cdot); f^!(\mathscr{B}^\cdot)) .$$

L'image de $1_{f^!(\mathscr{B}^\cdot)}$ par cet isomorphisme permet donc de définir une flèche d'adjonction

$$\mathbf{R}f_! \circ f^! \to 1_{D^b(Y)} .$$

Appendice A:

Les modules plats sur un anneau noethérien

A.1. Soit R un anneau commutatif unitaire et soit E un R-module. On sait que le foncteur $-\otimes E$ est toujours exact à droite. On dit alors que E est un module plat si ce foncteur est aussi exact à gauche. Cette condition est équivalente au fait que pour tout R-module M et M' et pour tout homomorphisme injectif $u: M' \to M$, l'homomorphisme $u \otimes 1_E: M' \otimes E \to M \otimes E$ est encore injectif ([Bo2], chap. I, § 2, prop. 1).

A.2. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de R. L'inclusion $j: \mathfrak{a} \to R$ induit un homomorphisme $\tilde{j}: \mathfrak{a} \otimes E \to E$ obtenu en composant l'homomorphisme $j \otimes 1_E$ avec l'isomorphisme canonique $R \otimes E = E$. On a alors le résultat suivant ([Bo2], chap. I, § 2, N° 3, remarque 1).

Lemme. *Pour que E soit un R-module plat il faut et il suffit que, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de R de type fini, l'homomorphisme $\tilde{j}: \mathfrak{a} \otimes E \to E$ soit injectif.*

A.3. Lemme. *Soit E un R-module de présentation finie et soit $\{F_i\}_{i \in I}$ une famille de R-modules. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\sigma: E \otimes (\prod_{i \in I} F_i) \to \prod_{i \in I} (E \otimes F_i)$$

est un isomorphisme.