Appendice A: Les modules plats sur un anneau noethérien

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Le théorème résulte alors du fait que les membres de droite des égalités (4.6.1) et (4.6.2) sont isomorphes en vertu de la proposition 4.4.

4.7. Appliquons le théorème 4.6 au cas où $\mathscr{A}^{\bullet} = f^{!}(\mathscr{B}^{\bullet})$. Comme les foncteurs f_* et $\mathscr{H}om$ sont exacts gauche, en appliquant le foncteur cohomologique H^0, puis en prenant les sections globales, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{D^b(Y)}(\mathbf{R}f_!(f^!(\mathscr{B}^{\bullet})); \mathscr{B}^{\bullet}) = \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(f^!(\mathscr{B}^{\bullet}); f^!(\mathscr{B}^{\bullet}))\,.$$

L'image de $1_{f^!(\mathscr{B}^{\bullet})}$ par cet isomorphisme permet donc de définir une flèche d'adjonction

$$\mathbf{R}f_! \circ f^! \to 1_{D^b(Y)}\,.$$

Appendice A:

Les modules plats sur un anneau noethérien

A.1. Soit R un anneau commutatif unitaire et soit E un R-module. On sait que le foncteur $-\otimes E$ est toujours exact à droite. On dit alors que E est un module plat si ce foncteur est aussi exact à gauche. Cette condition est équivalente au fait que pour tout R-module M et M' et pour tout homomorphisme injectif $u: M' \to M$, l'homomorphisme $u\otimes 1_E: M'\otimes E \to M\otimes E$ est encore injectif ([Bo2], chap. I, § 2, prop. 1).

A.2. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de R. L'inclusion $j: \mathfrak{a} \to R$ induit un homomorphisme $\tilde{j}: \mathfrak{a}\otimes E \to E$ obtenu en composant l'homomorphisme $j\otimes 1_E$ avec l'isomorphisme canonique $R\otimes E = E$. On a alors le résultat suivant ([Bo2], chap. I, § 2, N° 3, remarque 1).

Lemme. *Pour que E soit un R-module plat il faut et il suffit que, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de R de type fini, l'homomorphisme $\tilde{j}: \mathfrak{a}\otimes E \to E$ soit injectif.*

A.3. Lemme. *Soit E un R-module de présentation finie et soit $\{F_i\}_{i\in I}$ une famille de R-modules. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\sigma: E\otimes(\prod_{i\in I} F_i) \to \prod_{i\in I} (E\otimes F_i)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $L_1 \xrightarrow{\varphi} L_0 \xrightarrow{\psi} E \to 0$ une présentation de E, dans laquelle les R-modules L_0 et L_1 sont libres de type fini. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
L_1 \otimes (\prod_{i\in I} F_i) & \xrightarrow{\sigma_1} & \prod_{i\in I} (L_1 \otimes F_i) \\
\varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi'' \\
L_0 \otimes (\prod_{i\in I} F_i) & \xrightarrow{\sigma_0} & \prod_{i\in I} (L_0 \otimes F_i) \\
\psi' \downarrow & & \downarrow \psi'' \\
E \otimes (\prod_{i\in I} F_i) & \xrightarrow{\sigma} & \prod_{i\in I} (E \otimes F_i) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont induites par φ et ψ et les flèches horizontales sont les homomorphismes canoniques. Comme le foncteur produit tensoriel est exact à droite et le foncteur produit est exact, les colonnes de ce diagramme sont exactes. Les homomorphismes σ_0 et σ_1 sont des isomorphismes d'après ([Bo1], chap. 2, § 3, corollaire 3 de la proposition 7). Il en résulte que σ est un isomorphisme.

A.4. PROPOSITION. *Si $\{F_i\}_{i\in I}$ est une famille de R-modules plats sur un anneau noethérien R, alors le R-module $\prod_{i\in I} F_i$ est plat.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de R de type fini ; comme R est noethérien, le R-module $\mathfrak{a}$ est de présentation finie ([Bo2], chap. 1, § 2, lemme 8). Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a} \otimes (\prod_{i\in I} F_i) \arrow[r, "\tilde{j}"] \arrow[d, "\sigma"'] & \prod_{i\in I} F_i \\
\prod_{i\in I} (\mathfrak{a} \otimes F_i) \arrow[ur, "\tilde{j}'"'] &
\end{tikzcd}$$

où σ est un isomorphisme d'après le lemme A.3 et $\tilde{j}' = \prod_{i \in I} \tilde{j}_i$ est injectif d'après l'hypothèse et le lemme A.2. Il en résulte que $\tilde{j}$ est injectif et par suite le lemme A.2 montre que le module $\prod_{i \in I} F_i$ est plat.

Appendice B:

Le foncteur D

B.1. Reprenons les hypothèses du N° 2.1 mais supposons que Y est un point. Alors $f_! = \Gamma_c(X; -)$, X est un espace localement compact de c-dimension finie et $\mathscr{K}$ est un faisceau c-mou et plat ([Gr] 2.5.1 et 2.9.1). D'après la proposition 1.4, pour tout faisceau $\mathscr{A}$ sur X, le faisceau $\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}$ est c-mou.

Soit encore N un R-module.

B.2. On définit un foncteur contravariant

$$D(-): Sh(X)^0 \to Sh(X)$$

en posant

$$D(\mathscr{A}) = f^!_{\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}}(N).$$

Plus précisément $D(\mathscr{A})$ est le faisceau défini en posant

$$D(\mathscr{A})(U) = \mathrm{Hom}(\Gamma_c((\mathscr{A} \otimes \mathscr{K})_U); N)$$

pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et

$$\rho_{U', U} = \mathrm{Hom}(\bar{r}_{U', U}; 1_N)$$

pour tout $U', U \in \mathrm{Ouv}(X)$ tels que $U' \subset U$.

B.3. Dans ([Bo], V, § 7) le théorème de dualité est démontré, d'une façon un peu indirecte, à l'aide du foncteur D. On notera que la propriété fondamentale suivante du foncteur D est une conséquence facile de la proposition 3.10 si on remarque que $D(R_X)_{|U} = D(R_U) = f^!_{\mathscr{K}_U}(N)$.

B.4. Théorème (A. Borel). *Il existe un isomorphisme de foncteurs*

$$\mu: D(-) \to \mathscr{H}om(- ; D(R_X))$$