**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Band:** 31 (1985)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE ET PRINCIPE DE HASSE FIN POUR CERTAINS SYSTÈMES DE FORMES

**Kapitel:** A) Présentation générale

**Autor:** Danset, Renaud

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-54555

# MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE
ET
# PRINCIPE DE HASSE FIN
## POUR CERTAINS SYSTÈMES DE FORMES

par Renaud DANSET

## INTRODUCTION

### A) PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Soit, pour tout ce travail, $f = (f_1, \dots, f_r)$ un ensemble de $r$ formes, de degré $d \geqslant 2$, en $n$ variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ et à coefficients entiers. On prendra toujours $r \leqslant n$. (N.B.: « forme » signifie « polynôme homogène »).

Une conjecture attribuée à Artin dit que, si $d$ est impair et $n > rd^2$, le système diophantien $f = 0$ admet des solutions entières non triviales (on dit que $f$ représente zéro). Cette conjecture tente de préciser l'idée selon laquelle si $d$ est impair, ou pair mais avec des conditions nécessaires évidentes et s'il y a suffisamment de variables, alors le système $f$ représente zéro.

Birch (1957, Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables, *Mathematika* 4, 102-105) montre, pour $r = 1$, qu'il existe une fonction $d \mapsto N(d)$ telle que toute forme de degré impair $d$, en $n$ variables avec $n \geqslant N(d)$ représente zéro; mais sa méthode conduit à des valeurs $N(d)$ astronomiques.

En fait cette conjecture est tellement inaccessible que, dans le cas le plus simple, $d = 3$ et $r = 1$, Davenport (cf. bibliographie) a démontré, à la suite d'un énorme et remarquable travail, que toute forme cubique à coefficients entiers ayant au moins 16 variables, représente zéro. Non seulement 16 n'est pas 10, mais rien d'aussi précis n'est connu pour les autres couples $(d, r)$.

Une forme plus faible de la conjecture d'Artin est la suivante: pour tout $d \geqslant 2$, si $n > rd^2$, le système $f = 0$ admet des solutions non triviales dans $\mathbf{Q}_p$ (on dit que $f$ représente zéro dans $\mathbf{Q}_p$) pour tout entier premier $p$. Le cas $d = 2$, $r = 1$ constitue le Théorème de Hasse (cf. par exemple Borevitch-Chafarevitch, chapitre I, théorème 5). Le cas $d = 3$, $r = 1$ a été démontré simultanément mais de manières différentes par Demyanov (1950, On cubic forms in discretely normed fields, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.) 74*, 889-891) par Lewis (Cubic homogeneous polynomials over $p$-adic number-fields, *Annals Math. 56*, 1952, 473-478) et Davenport (Cubic forms in 32 variables, cf. bibliographie). Le cas $d = 2$, $r = 2$ a été démontré par Demyanov, une démonstration simplifiée se trouvant dans Birch, Lewis, Murphy, Simultaneous quadratic forms, *Amer. J. Math. 84*, *n° 1*, 1962, 110-115.

Cette seconde conjecture n'a, elle aussi, été démontrée pour aucun autre couple $(d, r)$. Cependant Brauer (1945, A note on systems of homogeneous algebraic equations, *Bull. Amer. Math. Soc. 51*, 749-755) a montré, pour $r = 1$, qu'il existe une fonction $d \mapsto M(d)$ telle que toute forme de degré $d$ ayant au moins $M(d)$ variables représente zéro dans $\mathbf{Q}_p$ pour tout $p$. Dans son travail cité ci-dessus, Birch a utilisé ce résultat de Brauer, malheureusement la méthode, on l'a déjà dit, ne donne pas des valeurs $M(d)$ raisonnables.

On peut citer aussi Ax et Kochen (1965, Diophantine problems over local fields, I, II, *Amer. J. Math. 87*, 605-645) qui ont prouvé que pour un degré $d$ donné, la seconde conjecture est vraie pour toutes les valeurs de $p$ sauf peut-être pour un nombre fini, dépendant de $d$ et dans le cas $r = 1$. Lang a aussi démontré que si la conjecture était vraie pour $r = 1$, elle était également vraie pour tout $r > 1$. (On quasi algebraic closure, *Ann. Math. 55*, *n° 2*, 1952, 373-390). Enfin Terjanian (*C.R. Acad. Sci.*, *262*, 1966, A612) a construit un polynôme homogène de degré 4 à 18 variables qui ne représente pas 0 dans $\mathbf{Q}_2$ ce qui constitue un contre-exemple à la conjecture, mais d'un type particulier...! Notons pour terminer qu'il est facile de montrer que la valeur hypothétique $r\,d^2$ est une borne inférieure (cf. Borevitch-Shafarevitch, Ch. I, § 6-5).

Le lien entre les deux conjectures précédemment citées est ce qu'on appelle le Principe de Hasse; si le système $f = 0$ représente zéro dans $\mathbf{R}$ et dans tous les $\mathbf{Q}_p$ alors il représente zéro dans $\mathbf{Q}$. Le cas $d = 2$, $r = 1$ constitue le Théorème de Minkowsky-Hasse (cf. Borevitch-Shafarevitch, ch. I, § 7), associé au théorème de Hasse mentionné ci-dessus, il devient le théorème de Meyer: *toute forme quadratique à coefficients entiers, indéfinie et ayant au moins cinq variables, représente zéro.* Malheureusement Selmer (The diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$, *Acta Math. 85*, *n° 3-4*, 1951, 203-362) a montré en particulier que la forme cubique $3x^3 + 4y^3 + 5z^3$ représente zéro dans $\mathbf{R}$ et dans tous les $\mathbf{Q}_p$ mais pas dans $\mathbf{Q}$. Enfin il existe beaucoup d'autres contre-exemples qui infirment le Principe de Hasse lorsque $d \geqslant 3$.

Que peut-on faire avec deux conjectures inaccessibles et un Principe faux?... Restreindre considérablement ses ambitions!

Il existe plusieurs façons d'affaiblir le Principe de Hasse (cf. M. de La Palice); celle qui est utilisée dans ce travail se définit comme suit et s'appelle

PRINCIPE DE HASSE FIN: Si le système diophantien $f = 0$ possède une solution *non singulière* (N.B.: cette dernière est forcément non triviale!) dans $\mathbf{R}$ et dans tous les $\mathbf{Q}_P$, alors le système $f$ représente zéro dans $\mathbf{Q}$.

Cette nouvelle version ne résiste pas mieux au contre-exemple de Selmer mais l'expérience a montré sa validité pour des classes suffisamment importantes de systèmes $f$ et en particulier pour ceux considérés dans ce travail.

Pour obtenir ses résultats sur les formes cubiques, évoqués ci-dessus (cf. également le paragraphe 5D du présent travail) Davenport utilise la méthode dite « du cercle » de Hardy et Littlewood. Birch (Forms in many variables, 1962, cf. bibliographie et § 5B du présent travail) s'inspire des résultats de Davenport en les généralisant considérablement. Enfin, W. M. Schmidt, vers 1980, reprend la méthode du cercle comme l'avait fait Birch mais pour le cas $d = 2$, $r > 1$.

Puisque la méthode du cercle étudie un certain type de sommes trigonométriques associées au système $f$, *il a paru intéressant d'exprimer la propriété précise de ces sommes* qui permet le succès du principe de Hasse fin pour les systèmes $f$ concernés.

Cette propriété (constituée par les hypothèses (H1) et (H2) ci-dessous formulées) n'est pas de tout repos. Trouver une qualité du système $f$ qui entraîne cette propriété des sommes trigonométriques associées et donc l'application du Principe de Hasse fin, est un problème difficile que chaque auteur traite à sa façon, qui ne constitue pas l'objet du présent travail mais qui est résumé au paragraphe 5. Notons d'ailleurs que les dites « qualités », même si leurs auteurs parviennent à leur donner une expression concise, sont difficilement compréhensibles d'un titulaire du baccalauréat et que leur vérification dans des cas généraux, c'est-à-dire exception faite des exercices « faits pour », n'est pas évidente.

Puisque la méthode du cercle établit une formule asymptotique, réduite en fait à sa partie principale dont le coefficient est le produit de facteurs représentant toutes les places de $\mathbf{Q}$, *il a paru intéressant de donner un exposé adélique de cette méthode*, suivant ainsi une tendance générale de ces dernières années et plus particulièrement Lachaud (1982 « une présentation adélique de la série singulière et du problème de Waring » cf. bibliographie).

On obtient ainsi:

1°) Une présentation unifiée des arcs majeurs.

2°) Une expression globale pour la série singulière et l'intégrale singulière qui met en évidence la transformée de Gauss globale $F^*$ (selon la notation d'Igusa, cf. bibliographie) associée à une fonction de Schwarz-Bruhat d'un type précis.

*Remarque.* Un résultat analogue pour d'autres fonctions de Schwarz-Bruhat est une des espérances que ce travail peut susciter.

3°) L'exposé d'une méthode suffisamment générale comme le montrent les exemples du paragraphe 5 et dont les hypothèses initiales sont nettement dégagées.

4°) La démonstration au lemme 1-6 d'une majoration générale d'une somme de modules d'intégrales oscillantes.

## B) Notations et Hypothèses principales

Soient $f = (f_1, ..., f_r)$ $r$ formes de degré $d \geqslant 2$, en $n$ variables $x = (x_1, ..., x_n)$ avec $r \leqslant n$ et à coefficients entiers.

Soit $g$ un polynôme quelconque de degré $< d$ et à coefficients entiers, en les variables $x$.

*Remarque.* Tout ce travail pourrait se faire sans mentionner un tel polynôme $g$, sur ce point on pourra lire la remarque finale du paragraphe 1 et le paragraphe 5A.

Soit $\mathscr{B}$ une boîte de dimension $n$ (parallélépipède de côtés parallèles aux axes de $\mathbf{R}^n$ ou encore: $\{x \in \mathbf{R}^n \mid 1 \leqslant i \leqslant n, a_i \leqslant x \leqslant b_i\}$) et de côtés au plus égaux à 1 (i.e.: $1 \leqslant i \leqslant n, b_i - a_i < 1$).

Soit $P \in \mathbf{R}_+$ et destiné à être très grand.

Soit $\varepsilon > 0$ et destiné à être très petit.

Soit $\nu \in \mathbf{Z}^r$.

Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r) \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$ ou encore: $1 \leqslant i \leqslant r, 0 \leqslant \alpha_i < 1$.

Soit la somme trigonométrique

$$S(\alpha) = \sum_{x \in P\mathscr{B} \cap \mathbf{Z}^n} \exp\left[2i\pi\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j f_j(x) + g(x)\right)\right]$$

On définit les hypothèses suivantes concernant les sommes trigonométriques $S(\alpha)$ et donc le système $f$: