C) Adèles

C) ADÈLES

Pour toutes les relations, définitions et propriétés des adèles utilisées ci-après, une référence est Godement (Adèles et idèles, cf. bibliographie).

Soit $\mathbf{A}$ l'ensemble des adèles sur $\mathbf{Q}$.

Soit ψ le caractère de Tate.

Soit φ une fonction de Schwarz-Bruhat sur $\mathbf{A}^n$, telle que

1) φ est décomposable (i.e.: $\varphi(x) = \varphi_\infty(x_\infty) \prod_p \varphi_p(x_p)$)

2) Pour tout p premier, on a

$$\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$$

(on note 1_E la fonction caractéristique d'un ensemble E),

3) $\varphi_\infty = \theta * 1_{P\mathscr{B}}$ (produit de convolution)

avec θ fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, à support compact inclus dans un voisinage de 0 et, en pratique, aussi petit qu'il sera nécessaire mais fixé et donc indépendant de la variable P.

Remarque. Il s'agit là d'une différence notable avec le travail de Birch (« forms in many variables » cf. bibliographie) qui utilise la fonction $1_{P\mathscr{B}}$, caractéristique de la boîte $P\mathscr{B}$, discontinue au bord de celle-ci. En définissant φ_∞ comme ci-dessus on obtient d'abord une fonction de Schwarz-Bruhat ce qui permet l'usage d'une formule de Poisson au paragraphe 1. En revanche, on complique légèrement le paragraphe 3 (cf. la remarque importante qui suit la démonstration du Lemme 3-2).

Soit $\xi \in \mathbf{A}^r$, on définit la somme

$$H(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \varphi(x)\psi(<\xi, f(x)>)$$

avec $<\xi, f(x)> = \sum_{i=1}^{r} \xi_i f_i(x)$.

Cette somme $H(\xi)$ est absolument convergente et constante sur les classes modulo $\mathbf{Q}^r$, essentiellement parce que le caractère de Tate est trivial sur $\mathbf{Q}$.

Ainsi, pour tout $\nu \in \mathbf{Z}^r$, l'application $\xi \mapsto H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)$ définit une fonction sur $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ et on a l'égalité

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \varphi(x) \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} \psi(<\xi, f(x)-\nu>)d\xi .$$

Si $f(x) \neq \nu$, le caractère $\xi \mapsto \psi(<\xi, f(x)-\nu>)$ n'est pas trivial sur le groupe $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ et son intégrale est nulle.

Si $f(x) = \nu$, ce caractère est trivial et comme $\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} d\xi = 1$, puisque les mesures de Haar sur $\mathbf{A}^r$ et $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ sont choisies pour qu'il en soit ainsi! On obtient l'importante égalité

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = \sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ f(x)=\nu}} \varphi_\infty(x)$$

(la somme $\sum$ du second membre ne porte que sur les $x \in \mathbf{Z}^n$ car $\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$ pour tout p, de plus cette somme représente à peu près le nombre de solutions entières du système $f = \nu$, présentes dans la boîte $P\mathscr{B} \subset \mathbf{R}^n$).

On cherche principalement, dans le présent travail, à comparer la somme $H(\xi)$ avec l'intégrale de même forme, appelée transformée de Gauss globale (en fait associée au système f, au caractère ψ et à la fonction φ)

$$F^*(\xi) = \int_{\mathbf{A}^n} \varphi(x)\psi(<\xi, f(x)>)dx\,.$$

On veut obtenir la formule asymptotique suivante: il existe $\delta > 0$, tel que

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = \int_{\mathbf{A}^r} F^*(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi + O(P^{n-rd-\delta})$$

Remarque. L'intégrale portant sur F^* est la seule raisonnable car cette fonction n'est pas en général constante sur les classes modulo $\mathbf{Q}$. De plus cette intégrale n'est autre, selon les notations d'Igusa (cf. bibliographie) que $\widehat{F^*}(-\nu) = F(\nu)$ appelée série singulière globale (cf. le paragraphe 5F). Le chapeau $\wedge$ désigne la transformée de Fourier associée au caractère de Tate (cf. Godement...).

D) Méthode du cercle adélique

Soit $\xi \in \mathbf{A}^r$; on utilisera désormais les notations suivantes

$$|\xi_\infty| = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant r} |\xi_{i,\infty}| \quad \text{et, pour tout } p, \quad |\xi_p|_p = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant r} |\xi_{i,p}|_p;$$

on définit aussi la fonction

$$Q(\xi) = \prod_p \operatorname{Max}(1, |\xi_p|_p)$$