D) MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

Si $f(x) \neq \nu$, le caractère $\xi \mapsto \psi(<\xi, f(x)-\nu>)$ n'est pas trivial sur le groupe $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ et son intégrale est nulle.

Si $f(x) = \nu$, ce caractère est trivial et comme $\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} d\xi = 1$, puisque les mesures de Haar sur $\mathbf{A}^r$ et $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ sont choisies pour qu'il en soit ainsi! On obtient l'importante égalité

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = \sum_{\substack{x\in\mathbf{Z}^n \\ f(x)=\nu}} \varphi_\infty(x)$$

(la somme $\sum$ du second membre ne porte que sur les $x \in \mathbf{Z}^n$ car $\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$ pour tout p, de plus cette somme représente à peu près le nombre de solutions entières du système $f = \nu$, présentes dans la boîte $P\mathscr{B} \subset \mathbf{R}^n$).

On cherche principalement, dans le présent travail, à comparer la somme $H(\xi)$ avec l'intégrale de même forme, appelée transformée de Gauss globale (en fait associée au système f, au caractère ψ et à la fonction φ)

$$F^*(\xi) = \int_{\mathbf{A}^n} \varphi(x)\psi(<\xi, f(x)>)dx\,.$$

On veut obtenir la formule asymptotique suivante: il existe $\delta > 0$, tel que

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = \int_{\mathbf{A}^r} F^*(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi + O(P^{n-rd-\delta})$$

Remarque. L'intégrale portant sur F^* est la seule raisonnable car cette fonction n'est pas en général constante sur les classes modulo $\mathbf{Q}$. De plus cette intégrale n'est autre, selon les notations d'Igusa (cf. bibliographie) que $\widehat{F^*}(-\nu) = F(\nu)$ appelée série singulière globale (cf. le paragraphe 5F). Le chapeau $\wedge$ désigne la transformée de Fourier associée au caractère de Tate (cf. Godement...).

D) Méthode du cercle adélique

Soit $\xi \in \mathbf{A}^r$; on utilisera désormais les notations suivantes

$$|\xi_\infty| = \operatorname*{Max}_{1\leq i\leq r} |\xi_{i,\infty}| \qquad \text{et, pour tout } p, \qquad |\xi_p|_p = \operatorname*{Max}_{1\leq i\leq r} |\xi_{i,p}|_p;$$

on définit aussi la fonction

$$Q(\xi) = \prod_p \mathrm{Max}(1, |\xi_p|_p)$$

qui jouera un rôle important et dont on peut remarquer qu'elle ne dépend que des places finies p de ξ mais pas de ξ_∞.

Enfin on définit, pour chaque $\Delta > 0$, *un arc majeur* (noter l'emploi du singulier)

$$M(\Delta) = \{\xi \in \mathbf{A}^r / |\xi_\infty| \leqslant P^{-d+\Delta} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leqslant P^\Delta\}.$$

Remarque.

a) Pour Δ suffisamment petit (ceci sera précisé en temps voulu) l'application canonique $\mathbf{A}^r \to (\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$, que nous désignerons désormais par la lettre π, est *injective* sur $M(\Delta)$. Dans ces conditions, on notera de la même façon $M(\Delta)$ et $\pi(M(\Delta))$ en remarquant que les mesures de Haar sur $\mathbf{A}^r$ et sur $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ attribuent respectivement la même valeur aux ensembles $M(\Delta)$ et $\pi(M(\Delta))$.

b) Ainsi le cercle $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de la méthode classique a pour analogue adélique le quotient *compact* $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ et les nombreux arcs majeurs classiques associés à un même $\Delta > 0$, trouvent leur analogue adélique dans un unique ensemble $M(\Delta)$ (ou $\pi(M(\Delta))$ si on préfère). Cette présentation de l'arc majeur adélique est due à Lachaud (cf. bibliographie).

Au paragraphe 1, au moyen d'une formule de Poisson, on compare, pour $\xi \in M(\Delta)$, la somme $H(\xi)$ et l'intégrale $F^*(\xi)$. On obtient ainsi le

THÉORÈME 1. *Pour* Δ *suffisamment petit, il existe* $\delta_1 > 0$ *tel que*

$$\int_{M(\Delta)} (H(\xi) - F^*(\xi))\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = O(P^{n-rd-\delta_1}).$$

Au paragraphe 2, on majore la somme $H(\xi)$ sur l'arc mineur adélique $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(M(\Delta))$, obtenant le

THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2) *et pour* $\mathscr{B}$ *et* P *convenablement choisis, il existe* $\delta_2 > 0$ *tel que*

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(M(\Delta))} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = O(P^{n-rd-\delta_2}).$$

Au paragraphe 3, on majore l'intégrale $F^*(\xi)$ sur $\mathbf{A}^r - M(\Delta)$ pour démontrer le

THÉORÈME 3. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *il existe* $\delta_3 > 0$ *tel que*

$$\int_{\mathbf{A}^r - M(\Delta)} F^*(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = O(P^{n-rd-\delta_3}).$$

Remarque. Une conséquence du théorème 3 est que $F^* \in L^1(\mathbf{A}^r)$.

Ces trois théorèmes permettent d'obtenir la formule asymptotique désirée.

PROPOSITION 4.1. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *pour* $\mathscr{B}$ *et* P *convenablement choisis, pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}^r$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ f(x) = \nu}} \varphi_\infty(x) = \widehat{F^*}(-\nu) + O(P^{n-rd-\delta}).$$

Au paragraphe 4, on utilise les hypothèses (H3) et (H4) pour rendre effective la formule asymptotique précédente. On démontre ainsi le

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3) *et* (H4), *pour* $\mathscr{B}$ *et* P *convenablement choisis, on a*

$$\widehat{F^*}(-\nu) \gg P^{n-rd}.$$

Il résulte de tout ceci le

THÉORÈME PRINCIPAL. *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3) *et* (H4) *le système diophantien* $f = \nu$ *admet une infinité de solutions entières.*

Un corollaire évident de ce Théorème Principal, pour $\nu = 0$, énonce qu'*un système* f *répondant aux hypothèses* (H1) *et* (H2) *observe le Principe de Hasse fin.*

Enfin le paragraphe 5, on l'a déjà compris, est consacré à des explications complémentaires et à des exemples suivant les travaux de Birch, Davenport et W. M. Schmidt; mais on ne trouvera dans ce paragraphe aucune démonstration à l'opposé des paragraphes 1 à 4 où on s'est efforcé d'être le plus complet possible.

§ 1. ARC MAJEUR

Le but de ce paragraphe est une bonne majoration de la différence entre la somme $H(\xi)$ et l'intégrale $F^*(\xi)$ lorsque ξ appartient à un arc majeur $M(\Delta)$.