§ 2. Arc Mineur

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

§ 2. Arc Mineur

On entend ici par « Arc Mineur », le complémentaire dans $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ de l'arc majeur $M(\Delta)$. On désire majorer le module de la somme $H(\xi)$ lorsque ξ appartient à un tel arc mineur.

Pour cela, l'hypothèse (H1) est indispensable. On définira d'ailleurs un ensemble $T(\Delta) \subset M(\Delta)$, mieux adapté à l'hypothèse (H1) et on obtiendra, au lemme 2.2 une majoration de $| H(\xi) |$ pour ξ appartenant au complémentaire de $T(\Delta)$ dans $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$.

Nous aurons ainsi les moyens de démontrer le principal résultat de ce paragraphe, c'est-à-dire le théorème 2. Enfin l'application stricte de l'hypothèse (H1) qui concerne des sommes trigonométriques d'un type précis nous contraint à des précautions qui sont l'objet du lemme 1 et qui compliquent légèrement, mais sans aucune conséquence sur les principaux résultats de ce travail, l'énoncé du théorème 2. Ces précautions concernent le choix de la boîte $\mathscr{B}$ puis celui de la variable P.

Lemme 2.1. *Il existe un sous-ensemble dense* $\mathscr{S}$ *de l'ensemble des boîtes* $\mathscr{B}$ *de* $\mathbf{R}^n$ *tel que, pour toute boîte* $\mathscr{B}$ *de* $\mathscr{S}$, *il existe un sous-ensemble* non borné *de* $\mathbf{R}$, *noté* $\mathscr{P}(\mathscr{B})$ *avec, pour tout* P *élément de* $\mathscr{P}(\mathscr{B})$ *et pour* k *égal à* 0 *ou* 1, *l'égalité suivante*

$$\mathbf{Z}^n \cap (\theta * 1_{P\mathscr{B}})^{-1}(\{k\}) = \mathbf{Z}^n \cap 1_{P\mathscr{B}}^{-1}(\{k\}) . \tag{2.1}$$

Remarque. Une explication romanesque du lemme 2.1 et de sa démonstration serait la suivante.

L'adoucissement de la fonction $1_{P\mathscr{B}}$ réalisé par le produit de convolution $\theta * 1_{PB}$, se produit au voisinage du bord de la boîte $P\mathscr{B}$. Si ce bord est à distance $> \frac{1}{3}$ du réseau $\mathbf{Z}^n$ et si l'adoucissement est suffisamment rapide (support de $\theta \subset \left[-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3} \right]$, par exemple !) il ne concerne aucun point de $\mathbf{Z}^n$.

Démonstration du lemme 2.1. Une boîte $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^n$ est un n-parallélépipède de côtés parallèles aux axes, ou encore $\mathscr{B} = \{x \in \mathbf{R}^n \,/\, (1 \leqslant i \leqslant n), a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$.

Considérant $E = \{(a_1, b_1, ..., a_n, b_n) \in \mathbf{R}^{2n} \,/\, (1 \leqslant i \leqslant n), \ a_i < b_i\}$, sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^{2n}$, en bijection naturelle avec l'ensemble des boîtes $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^n$, on peut définir sur E une topologie évidente et donner un sens non moins évident à l'expression : « $\mathscr{S}$ est dense dans E ».

On peut aussi restreindre E par des conditions supplémentaires comme, par exemple :

$$\operatorname{Max}(b_i - a_i) < 1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{Max}_i(|a_i|, |b_i|) < M .$$

Définissons alors l'ensemble $\mathscr{S} = \{B \in E \mid (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ est une famille finie de nombres réels linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}\}$.

Pour des raisons de dénombrabilité, $\mathscr{S}$ est dense dans E.

Soit maintenant $B \in \mathscr{S}$; le théorème de Kronecker (cf. Hardy and Wright, "The theory of numbers", Oxford Press, Théorème 444) dit justement que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble *non borné* de $\mathbf{R}$ que nous noterons $\mathscr{P}_\varepsilon(\mathscr{B})$ et tel que, pour tout $P \in \mathscr{P}_\varepsilon(\mathscr{B})$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on ait

$$\left[Pa_i - \frac{1}{2}\right] < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left[Pb_i - \frac{1}{2}\right] < \varepsilon$$

En choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{6}$ et le support de θ inclus dans $\left[-\dfrac{1}{3}, +\dfrac{1}{3}\right]^n$, on se convaincra que

$$\{x \in \mathbf{Z}^n \mid \theta * 1_{P\mathscr{B}}(x) \neq 1_{P\mathscr{B}}(x)\} = \emptyset$$

ce qui constitue le résultat de ce lemme. □

Définissons maintenant, pour $\Delta > 0$, l'ensemble

$$T(\Delta) = \{\xi \in \mathbf{A}^r \mid |\xi_\infty| Q(\xi) \leqslant P^{-d+\Delta} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leqslant P^\Delta\}$$

où, mais il s'agit d'un rappel !

$$Q(\xi) = \prod_p \operatorname{Max}(1, |\xi_p|_p) .$$

Puisque nous avons $Q(\xi) \geqslant 1$, l'inégalité

$$|\xi_\infty| Q(\xi) \leqslant P^{-d+\Delta}$$

entraîne l'inégalité

$$|\xi_\infty| \leqslant P^{-d+\Delta}$$

et on obtient donc : $T(\Delta) \subset M(\Delta)$. Ces ensembles $T(\Delta)$ sont bien adaptés à l'hypothèse (H1) comme le montre le lemme suivant.

Lemme 2.2. *Avec les notations précédentes et sous l'hypothèse* (H1), *pour tout* $\xi \in \mathbf{A}^r$ *tel que*

$$\pi(\xi) \notin \pi(T(\Delta)), \tag{2.2}$$

où π *est la projection canonique de* $\mathbf{A}^r$ *sur* $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$, *on a, pour toute boîte* $\mathscr{B} \in \mathscr{S}$, *pour tout* $P \in \mathscr{P}(\mathscr{B})$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *l'inégalité*

$$| H(\xi) | \ll P^{n-\Delta\Omega+\varepsilon}. \tag{2.3}$$

Démonstration. Dans une première partie, on réécrit la somme $H(\xi)$ sous la forme d'une somme trigonométrique $S(\alpha)$ pour un α convenable.

Dans une seconde partie on applique l'hypothèse (H1) à cette somme $S(\alpha)$.

1^re partie. Nous savons que, par définition, nous avons l'égalité

$$H(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \varphi(x)\, \psi\left(<\xi, f(x)>\right).$$

Puisque, pour tout entier premier p, on a $\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$, la somme peut se réduire aux $x \in \mathbf{Z}^n$.

Puisque $\mathscr{B} \in \mathscr{S}$ et $P \in \mathscr{P}(\mathscr{B})$, l'égalité (2.1) nous permet d'écrire la relation

$$H(\xi) = \sum_{x \in P\mathscr{B} \cap \mathbf{Z}^n} \psi_\infty(<\xi_\infty, f(x)>) \prod_p \psi_p(<\xi_p, f(x)>). \tag{2.4}$$

Suivant alors une remarque qui a déjà servi dans la démonstration du lemme 1.2, nous pouvons remplacer ξ_p par la partie polaire de son développement hensélien puisque $f(x) \in \mathbf{Z}^r$ et que le caractère ψ_p est trivial sur $\mathbf{Z}_p^r$.

Cette partie polaire s'écrit

$\dfrac{a_p}{q(\xi_p)} = \left(\dfrac{a_{p,1}}{q(\xi_p)}, \ldots, \dfrac{a_{p,r}}{q(\xi_p)}\right)$ avec les conditions qui la caractérisent

$$0 \leqslant a_{p,i} < q(\xi_p) \quad (1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$\operatorname{pgcd}(a_{p,1}, \ldots, a_{p,r}, p) = 1,$$

$$q(\xi_p) = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant r} (1, | \xi_{p,i} |_p).$$

On obtient alors l'égalité

$$H(\xi) = \sum_{x \in P\mathscr{B} \cap \mathbf{Z}^n} \exp(2i\pi < -\xi_\infty + \sum_p \frac{a_p}{q(\xi_p)}, f(x)>). \tag{2.5}$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini d'entiers premiers p, tels que $q(\xi_p) > 1$ ou, ce qui est équivalent, $a_p \neq 0$, la somme figurant dans l'exposant ci-dessus a un sens.

De plus, pour ce nombre fini d'entiers premiers p, on a $q(\xi_p) = p^\alpha$ avec $\alpha \geqslant 1$, donc le p.p.c.m. de différents $q(\xi_p)$ n'est autre que leur produit. On obtient ainsi

$$\sum_p \frac{a_p}{q(\xi_p)} = \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} \qquad (\text{élément de } \mathbf{Q}^r)$$

avec

$$Q(\xi) = \prod_p q(\xi_p)$$

et

$$\operatorname{pgcd}(a_1(\xi), \dots, a_r(\xi), Q(\xi)) = 1 \qquad (\text{on ne considère que les } a_i(\xi) \neq 0)$$

$$0 \leqslant a_i(\xi) < Q(\xi) \qquad (1 \leqslant i \leqslant r)\,.$$

Il vient donc

$$H(\xi) = \sum_{x \in P\mathscr{B} \cap \mathbf{Z}^n} \exp\left(2i\pi < -\xi_\infty + \frac{a(\xi)}{Q(\xi)}, f(x) >\right). \tag{2.6}$$

L'égalité (2.6) montre que la somme $H(\xi)$ est une somme trigonométrique $S(\alpha)$ pour $g = 0$ et $\alpha = \dfrac{a(\xi)}{Q(\xi)} - \xi_\infty$.

2^e *partie.* Soit $\Delta > 0$, supposons que α, trouvé ci-dessus, soit dans le cas ii) de l'hypothèse (H1), c'est-à-dire qu'il existe $\dfrac{a}{q} = \left(\dfrac{a_1}{q}, \dots, \dfrac{a_r}{q}\right)$ élément de $\mathbf{Q}^r$ tel que:

$$\begin{aligned} &0 \leqslant a_i < q && (1 \leqslant i \leqslant r)\,, \\ &\operatorname{pgcd}(a_1, \dots, a_r, q) = 1\,, \\ &1 \leqslant q \leqslant P^\Delta\,, \\ &\left| \alpha_i - \frac{a_i}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q} P^{-d+\Delta} && (1 \leqslant i < r)\,. \end{aligned}$$

L'ultime condition est équivalente à l'inégalité

$$\left| -\xi_\infty + \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} - \frac{a}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q} P^{-d+\Delta}. \tag{2.7}$$

Considérons l'élément ζ de $\mathbf{A}^r$ tel que $\zeta = \xi - \dfrac{a(\xi)}{Q(\xi)} + \dfrac{a}{q}$.

Puisque, pour tout entier premier p, on a $\left(\xi - \dfrac{a(\xi)}{Q(\xi)}\right)_p \in \mathbf{Z}_p^r$, on obtient

$$Q(\zeta) = Q\left(\frac{a}{q}\right) = q\,.$$

En conséquence, l'inégalité (2.7) devient

$$|\,\zeta_\infty\,|\,Q(\zeta) \leqslant P^{-d+\Delta}\,;$$

comme de plus

$$1 \leqslant q = Q(\zeta) \leqslant P^{\Delta}$$

on constate que $\zeta \in T(\Delta)$. Enfin, puisque $(\zeta - \xi) \in \mathbf{Q}^r$, on obtient

$$H(\xi) = H(\zeta) \qquad \text{et} \qquad \pi(\xi) \in \pi\big(T(\Delta)\big)\,.$$

Si, maintenant, nous imposons la condition $\pi(\xi) \notin \pi\big(T(\Delta)\big)$, alors, par contrapposée, α n'est pas dans le cas ii) de l'hypothèse (H1); il est donc dans le cas i), d'où l'inégalité

$$|\,H(\xi)\,| \ll P^{n-\Delta\Omega+\varepsilon}$$

qui achève cette démonstration. □

Nous avons encore besoin d'un majorant de la mesure de $T(\Delta)$ qui est l'objet d'un dernier lemme.

LEMME 2.3. *On a l'inégalité*

$$\mu\big(T(\Delta)\big) \leqslant P^{-rd+(r+1)\Delta}\,. \tag{2.8}$$

Démonstration. Dans la démonstration du lemme 2.2, nous avons vu que, $\xi \in \mathbf{A}^r$ étant donné, on connaît alors $\xi_\infty \in \mathbf{R}^r$ et $\dfrac{a(\xi)}{Q(\xi)} \in \mathbf{Q}^r$, ce dernier ne dépendant que des ξ_p, pour tout p entier premier.

Réciproquement le couple $\left(\xi_\infty, \dfrac{a(\xi)}{Q(\xi)}\right)$ définit ξ modulo $\prod\limits_p \mathbf{Z}_p^r$.

Pour $\dfrac{a}{q} = \left(\dfrac{a_1}{q}, \ldots, \dfrac{a_r}{q}\right) \in \mathbf{Q}^r$ et tel que

$$0 \leqslant a_i < q\ (1 \leqslant i \leqslant r)\,,$$
$$\text{pgcd}\,(a_1, \ldots, a_r, q) = 1\,.$$

On définit

$$T_{a,q}(\Delta) = \{ \xi \in \mathbf{A}^r \mid a(\xi) = a \quad \text{et} \quad Q(\xi) = q$$
$$\text{et} \quad |\xi_\infty| \, Q(\xi) \leqslant P^{-d+\Delta} \}.$$

Alors on obtient

$$\mu(T_{a,q}(\Delta)) = \mu_\infty(\{ x \in \mathbf{R}^r \mid |x| \leqslant \frac{1}{q} P^{-d+\Delta} \}) \prod_p \mu_p(\mathbf{Z}_p^r) = q^{-r} P^{-rd+r\Delta}$$

De plus, on vérifie facilement que pour $(a, q) \neq (a_1, q_1)$ on a

$$T_{a,q}(\Delta) \cap T_{a_1,q_1}(\Delta) = \emptyset$$

et on a aussi

$$T(\Delta) = \bigcup_{1 \leqslant q \leqslant P^\Delta} \cup_a T_{a,q}(\Delta).$$

De ces trois dernières relations résulte le calcul suivant

$$\begin{aligned} \mu(T(\Delta)) &= \sum_{1 \leqslant q \leqslant P^\Delta} \sum_{\substack{0 \leqslant a_i < q \\ \mathrm{pgcd}(a_1, \dots, a_r, q) = 1}} q^{-r} P^{-rd+\Delta r} \\ &\leqslant \sum_{1 \leqslant q \leqslant P^\Delta} \sum_{0 \leqslant a_i < q} q^{-r} P^{-rd+r\Delta} \\ &\leqslant P^{-rd+(r+1)\Delta}; \end{aligned}$$

le lemme 2.3 est donc démontré. □

Nous pouvons désormais démontrer le principal résultat de ce paragraphe 2.

THÉORÈME 2. *Avec les notations précédentes et sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *pour toute boîte* $\mathscr{B} \in \mathscr{S}$, *pour tout* $P \in \mathscr{P}(\mathscr{B})$ *sous-ensemble non borné de* R, *pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}^r$, *pour tout* Δ *tel que* $0 < \Delta \leqslant \frac{rd}{r+1}$, *il existe* $\delta_2 > 0$ *tel que*

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(M(\Delta))} H(\xi) \, \psi(<\xi, -\nu>) \, d\xi = O(P^{n-rd-\delta_2}).$$

Démonstration. Puisque $T(\Delta) \subset M(\Delta)$, il suffit de montrer que

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(T(\Delta))} |H(\xi)| \, d\xi = O(P^{n-rd-\delta_2}).$$

Choisissons Δ tel que $0 < \Delta \leqslant \dfrac{rd}{r+1}$, puis définissons une suite

$$\Delta_0 = \Delta < \Delta_1 < \ldots < \Delta_N = \frac{rd}{r+1}$$

obtenue en fixant $\delta > 0$ tel que

$$\Omega - r - 1 > 2\delta\Delta^{-1} \tag{2.9}$$

et

$$\frac{1}{2}\delta > (r+1)(\Delta_{t+1} - \Delta_t) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant N-1\,. \tag{2.10}$$

Une telle suite existe puisque, en vertu de l'hypothèse (H2) on a $\Omega - r - 1 > 0$, et δ est d'autant plus petit que Δ est lui-même petit. Puis, δ étant choisi en fonction de l'inégalité (2.9), on peut définir $(\Delta_{t+1} - \Delta_t)$ à partir de l'inégalité (2.10) et obtenir enfin la valeur de N. Il est important de remarquer que δ et N sont indépendants de P.

La raison du choix de $\Delta_N = \dfrac{rd}{r+1}$ vient du calcul suivant et du lemme 2.2.

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(T(\Delta_N))} |\, H(\xi)\, |\, d\xi \ll \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} P^{n - \Delta_N \Omega + \varepsilon}\, d\xi \ll P^{n - \frac{rd}{r+1}\Omega + \varepsilon}$$

Mais l'inégalité (2.9) donne

$$\frac{\Omega}{r+1} > 1 + \frac{2\delta}{(r+1)\Delta}$$

donc

$$\begin{aligned} n - \frac{rd}{r+1}\Omega + \varepsilon &< n - rd - 2\delta\frac{\Delta_N}{\Delta} + \varepsilon \\ &< n - rd - 2\delta + \varepsilon \end{aligned}$$

d'où l'inégalité

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(T(\Delta_N))} |\, H(\xi)\, |\, d\xi \ll P^{n - rd - 2\delta + \varepsilon} \tag{2.11}$$

Par ailleurs, on calcule ce qui suit, pour chaque t tel que $0 \leqslant t \leqslant N-1$, et en utilisant les lemmes 2.2 et 2.3

$$\int_{\pi(T(\Delta_{t+1}))-\pi(T(\Delta_t))} |H(\xi)|\,d\xi \ll \int_{\pi(T(\Delta_{t+1}))} P^{n-\Delta_t\Omega+\varepsilon}\,d\xi$$
$$\ll P^{-rd+(r+1)\Delta_{t+1}+n-\Delta_t\Omega+\varepsilon} \ll P^{n-rd+(r+1)(\Delta_{t+1}-\Delta_t)-\Delta_t(\Omega-r-1)+\varepsilon}$$

Mais l'inégalité (2.10) aidant ainsi que l'inégalité (2.9) qui entraîne

$$(\Omega-r-1)\,\Delta_t > (\Omega-r-1)\Delta > 2\delta\,.$$

On obtient l'inégalité

$$\int_{\pi(T(\Delta_{t+1}))-\pi(T(\Delta_t))} |H(\xi)|\,d\xi \ll P^{n-rd-\frac{3}{2}\delta+\varepsilon} \tag{2.12}$$

En réunissant l'inégalité (2.11) et les inégalités (2.12) dont le nombre N ne dépend pas de P, il vient

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r-\pi(T(\Delta))} |H(\xi)|\,d\xi \ll P^{n-rd-\frac{3}{2}\delta+\varepsilon}$$

On peut enfin choisir $\varepsilon = \dfrac{\delta}{2}$ et $\delta_2 = \delta$ pour achever la démonstration du théorème 2. □

Remarque. La démonstration du théorème 2 est classique: voir, par exemple, Birch lemme 4.4.

Remarque. Pour de grandes valeurs Δ, la restriction de la projection π à l'ensemble $T(\Delta)$ n'est pas injective.

Ceci ne présente aucun inconvénient pour la démonstration du théorème 2, puisque l'inégalité

$$\mu(T(\Delta)) \geqslant \mu[\pi(T(\Delta))]$$

est dans le bon sens.

Au contraire, au paragraphe 1, pour étudier l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi(M(\Delta))} H(\xi)d\xi$, il est indispensable d'avoir l'égalité

$$\mu(M(\Delta)) = \mu[\pi(M(\Delta))]$$

qui est obtenue si la projection π est injective sur $M(\Delta)$ et donc pour $\Delta < \dfrac{d}{3}$ en vertu du lemme 1.7.