§ 3. Intégration de la transformée de gauss globale

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

§ 3. Intégration de la transformée de Gauss globale

La principale difficulté de ce paragraphe concerne (encore !) la place infinie où nous cherchons une bonne majoration de l'expression $|F^*(\xi_\infty)|$ pour ξ_∞ grand. C'est l'objet des lemmes 3.1 et surtout 3.2 qui reprennent l'originale méthode de Birch (lemma 4.1, 4.2 and corollary, 5.2).

La suite et la fin de ce paragraphe adaptent la démonstration du théorème 2.8 de Lachaud.

Lemme 3.1. *Soit* $0 < u < d$, *alors, sous l'hypothèse* (H1), *pour tout* $\alpha \in \mathbf{R}^r$ *tel que* $|\alpha| \leqslant P^{-\frac{(d+u)}{2}}$ et pour $P > 2^{\frac{1}{u}}$, *on a l'inégalité*

$$|S(\alpha)| \ll P^{n+\varepsilon}[\mathrm{Max}(1, P^d|\alpha|)]^{-\Omega}. \tag{3.1}$$

Démonstration. Considérons un élément α de $\mathbf{R}^r$ qui soit dans le cas ii) de l'hypothèse (H1) pour deux éléments distincts $\frac{a_1}{q_1}$ et $\frac{a_2}{q_2}$ de $\mathbf{Q}^r$.

Autrement dit, pour $k \in \{1, 2\}$ et $i \in \{1, ..., r\}$ on a les relations habituelles

$$\begin{aligned} &0 \leqslant a_{ki} < q_k\,, \\ &\mathrm{pgcd}(a_{k1}, ..., a_{kr}, q_k) = 1\,, \\ &1 \leqslant q_k \leqslant P\,, \\ &|q_k\alpha - a_k| \leqslant P^{-d+\Delta}. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{a_1}{q_1}$ et $\frac{a_2}{q_2}$ sont distincts, il existe $i \in \{1, ..., r\}$ tel que

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant |q_2\, a_{1i} - q_1\, a_{2i}| \\ &\leqslant q_2\, |q_1\, \alpha_i - a_{1i}| + q_1\, |q_2\, \alpha_i - a_{2i}| \\ &\leqslant 2\, P^{-d+2\Delta} \end{aligned}$$

Un tel résultat est manifestement faux sous les conditions suivantes

$$\Delta < \frac{d}{2} \quad \text{et} \quad P > 2^{\frac{1}{d-2\Delta}}. \tag{3.2}$$

Revenons à la démonstration de l'inégalité (3.1); pour $|\alpha| \leqslant P^{-d}$ cette inégalité est triviale puisque

$$|S(\alpha)| \ll P^{n+\varepsilon}$$

est toujours vrai.

Supposons donc désormais que

$$P^{-d} < |\alpha| \leqslant P^{-\frac{1}{2}(d+u)}.$$

Posons $|\alpha| = P^{-d+h}$, il vient donc

$$0 < h \leqslant \frac{d-u}{2}.$$

Ainsi α est-il dans le cas ii) de l'hypothèse (H1) pour $\Delta = h$, $a = 0$ et $q = 1$; de plus, pour

$$P > 2^{\frac{1}{u}} \geqslant 2^{\frac{1}{d-2h}}$$

les conditions (3.2) sont remplies et α n'est dans le cas ii) de l'hypothèse (H1) pour aucun élément non nul $\frac{a}{q}$ de $\mathbf{Q}^r$.

Soit maintenant $0 < \eta < h$ et $\Delta_1 = h - \eta$, alors α n'est plus dans le cas ii) de l'hypothèse (H1) pour Δ_1, $a = 0$ et $q = 1$ et pas davantage pour tout autre $\frac{a}{q} \in \mathbf{Q}^r - \{0\}$ car cela contredirait ce qui vient d'être dit. Donc α est dans le cas i) de l'hypothèse (H1) pour Δ_1 ; on en déduit l'inégalité

$$|S(\alpha)| \ll P^{n-\Delta_1\Omega+\varepsilon} \ll P^{n-h\Omega+\eta\Omega+\varepsilon}$$

En utilisant $P^d|\alpha| = P^h$ et puisque la constante impliquée par le symbole « $\ll$ » ne dépend pas de $\eta > 0$, on conclut que

$$|S(\alpha)| \ll P^{n+\varepsilon}(P^d|\alpha|)^{-\Omega}$$

ce qui achève la démonstration de ce lemme. □

La transformée de Gauss locale associée à la place infinie de $\mathbf{Q}$ est, selon les notations adoptées dès l'introduction de ce travail.

$$F_\infty^*(\xi_\infty) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\infty(x) \exp(-2i\pi < \xi_\infty, f(x) >)\, dx$$

avec

$$\varphi_\infty = \theta * 1_{P\mathscr{B}}.$$

LEMME 3.2. *Avec les notations précédentes et sous l'hypothèse* (H1), *on a*

$$|F_\infty^*(\xi_\infty)| \ll P^n[\mathrm{Max}(1, P^d|\xi_\infty|)]^{-\Omega+\varepsilon}.$$

Démonstration.

A) Définissons la fonction

$$E_{\xi_\infty}(x) = \exp(-2i\pi < \xi_\infty , f(x) >) ;$$

alors nous avons l'égalité suivante

$$(\varphi * E_{\xi_\infty})(0) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) \exp(-2i\pi < \xi_\infty , f(-x) >) \, dx = F_\infty^*((-1)^d \xi_\infty) .$$

En utilisant l'associativité du produit de convolution, il vient

$$[(\theta * 1_{P\mathscr{B}}) * E_{\xi_\infty}](0) = [\theta * (1_{P\mathscr{B}} * E_{\xi_\infty})](0)$$

ainsi, en changeant ξ_∞ en $(-1)^d \xi_\infty$, on obtient

$$F_\infty^*(\xi_\infty) = \int_{\mathbf{R}^n} \theta(-x) \cdot (1_{P\mathscr{B}} * E_{(-1)^d \xi_\infty})(x) dx .$$

Par commodité décidons que θ est paire, il en résulte l'inégalité

$$(3.3) \qquad | F_\infty^*(\xi_\infty) | \ll \operatorname*{Max}_{x \in \operatorname{Supp} \theta} | (1_{P\mathscr{B}} * E_{(-1)^d \xi_\infty})(x) | .$$

B) Faisons maintenant le calcul suivant

$$\begin{aligned}
(1_{PB} * E_{(-1)^d \xi_\infty})(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} 1_{P\mathscr{B}}(x-t) \exp(-2i\pi < (-1)^d \xi_\infty , f(t) >) \, dt \\
&= \int_{P\mathscr{B}-x} \exp(-2i\pi < \xi_\infty , f(u) >) \, du \qquad (\text{avec } u = -t) \\
&= \int_{P\left(\mathscr{B}-\frac{x}{P}\right)} \exp(-2i\pi < \xi_\infty , f(u) >) \, du \\
&= z^{-n} \int_{zP\left(\mathscr{B}-\frac{x}{P}\right)} \exp(-2i\pi < \xi_\infty z^{-d}, f(v) >) \, dv \qquad (\text{avec } v = zu) \\
(3.4) \qquad &= z^{-n} \left[\sum_{y \in K} \int_{b(y)} + \int_C - \int_D \right] .
\end{aligned}$$

Dans cette dernière ligne de calcul l'expression présente sous les signes $\int$ est, bien évidemment, celle figurant sous le signe $\int$ de la ligne précédente. De plus, les notations utilisées ont les sens suivants :

$$K = \mathbf{Z}^n \cap zP\left(\mathscr{B} - \frac{x}{P}\right),$$

$b(y)$ est la boîte unité de centre y,

C et D sont des domaines voisins des bords de la boîte $zP\left(\mathscr{B} - \frac{x}{P}\right)$, destinés à nous rappeler que les ensembles $zP\left(\mathscr{B} - \frac{x}{P}\right)$ et $\bigcup_{y \in K} b(y)$ ne sont pas tout à fait égaux.

C) L'ordre de grandeur du bord de la boîte $zP\left(\mathscr{B} - \frac{x}{P}\right)$ est $(zP)^{n-1}$, on en déduit l'inégalité

$$(3.5) \qquad \left| \int_C - \int_D \right| \ll (zP)^{n-1}.$$

Considérons la fonction $g(y) = \exp(-2i\pi \langle \xi_\infty z^{-d}, f(y) \rangle)$, on a alors

$$\frac{\partial g}{\partial y_j}(y) = -2i\pi \left\langle \xi_\infty z^{-d}, \frac{\partial f}{\partial y_j}(y) \right\rangle g(y) \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

et donc

$$(3.6) \qquad |\operatorname{grad} g(y)| \ll |\xi_\infty| \, z^{-d} (Pz)^{d-1}.$$

Dans l'inégalité (3.6) la facteur $(Pz)^{d-1}$ provient de la majoration de $\frac{\partial f}{\partial y_j}(y)$ qui est homogène de degré $(d-1)$ selon les coordonnées de y lequel appartient à $zP\left(\mathscr{B} - \frac{x}{P}\right) + b(0)$, ensemble lui-même inclus dans la boule de centre 0 et de rayon $\gamma\, zP$ où γ est une constante qui tient compte du domaine borné de $\mathbf{R}^n$ dans lequel se trouve la boîte $\mathscr{B}$ et donc de celui tout aussi borné dans lequel se trouve $\mathscr{B} - \frac{x}{P}$, pour tout $P \geqslant 1$ et tout x appartenant au support compact de la fonction θ.

Une conséquence de l'inégalité (3.6) est la majoration suivante

$$(3.7) \qquad \left| \left(\int_{b(y)} \right) - \exp(-2i\pi \langle \xi_\infty z^{-d}, f(y) \rangle) \right| \ll |\xi_\infty| \, z^{-1} P^{d-1}.$$

Posons maintenant

$$S(\xi_\infty z^{-d}) = \sum_{y \in K} \exp(-2i\pi \langle \xi_\infty z^{-d}, f(y) \rangle).$$

Alors l'égalité (3.4) et les inégalités (3.5) et (3.7) entraînent l'inégalité

$$(3.8)\quad | z^n(1_{P\mathscr{B}} * E_{(-1)^d\xi_\infty})(x) - S(\xi_\infty z^{-d}) | \ll (zP)^{n-1} + | \xi_\infty | z^{-1} P^{d-1}(zP)^n$$

dans laquelle l'expression $(zP)^n$ correspond au cardinal de l'ensemble K.

D) La somme $S(\xi_\infty z^{-d})$ est une somme $S(\alpha)$ pour $\alpha = \xi_\infty z^{-d}$ avec zP au lieu de P et la boîte $\mathscr{B} - \dfrac{x}{P}$ au lieu de la boîte $\mathscr{B}$.

Les conditions d'application du lemme 3.1 deviennent alors, avec $0 < u < d$,

$$(3.9)\qquad zP > 2^{\frac{1}{u}}$$

et

$$| \xi_\infty | z^{-d} \leqslant (Pz)^{-\frac{1}{2}(d+u)},$$

cette seconde inégalité étant équivalente à l'inégalité

$$(3.10)\qquad z \geqslant | \xi_\infty |^{\frac{2}{d-u}} P^{\frac{d+u}{d-u}}.$$

Le paramètre u sera précisé ultérieurement, mais désormais la variable z satisfera aux inégalités (3.9) et (3.10). En appliquant le lemme 3.1, on obtient

$$\begin{aligned} | S(\xi_\infty z^{-d}) | &\ll (zP)^{n+\varepsilon}[\mathrm{Max}(1, (zP)^d|\xi_\infty|z^{-d})]^{-\Omega} \\ (3.11)\qquad &\ll (zP)^{n+\varepsilon}[\mathrm{Max}(1, P^d|\xi_\infty|)]^{-\Omega} \end{aligned}$$

Dans le cas où $P^d | \xi_\infty | \leqslant 1$, l'inégalité que ce lemme propose se réduit à la trivialité suivante:

$$(3.12)\qquad | F^*(\xi_\infty) | \ll P^n.$$

Nous pouvons donc supposer désormais que $P^d | \xi_\infty | > 1$, alors les relations (3.8) et (3.11) impliquent la majoration

$$\begin{aligned} | (1_{PB} * E_{(-1)^d\xi_\infty})(x) | &\ll z^\varepsilon P^{n+\varepsilon}(P^d|\xi_\infty|)^{-\Omega} + z^{-1} P^{n-1}(1+P^d|\xi_\infty|) \\ &\ll z^\varepsilon P^{n+\varepsilon}(P^d|\xi_\infty|)^{-\Omega} + z^{-1} P^{n-1} P^d | \xi_\infty |. \end{aligned}$$

(3.13)

E) Choisissons enfin

$$(3.14)\qquad z = P^{-1}(P^d|\xi_\infty|)^{1+\Omega}.$$

Il faut alors vérifier l'inégalité (3.10), d'où le calcul suivant:

$$P^{-1}(P^d|\xi_\infty|)^{1+\Omega} \geqslant |\xi_\infty|^{\frac{2}{d-u}} P^{\frac{d+u}{d-u}},$$

$$(P^d|\xi_\infty|)^{1+\Omega} \geqslant (P^d|\xi_\infty|)^{\frac{2}{d-u}}.$$

et puisque nous avons la relation $P^d\,|\,\xi_\infty\,| > 1$, il vient

$$1 + \Omega \geqslant \frac{2}{d-u},$$

qui donne

$$u \leqslant d - \frac{2}{1+\Omega};$$

puisque $d \geqslant 2$ et $\Omega > 0$, on a

$$0 < d - \frac{2}{1+\Omega} < d$$

et nous pouvons donc poser, au mieux,

(3.15) $$u = d - \frac{2}{1+\Omega}.$$

Il reste à vérifier l'inégalité (3.9), qui, compte tenu de l'égalité (3.14) devient

$$(P^d|\xi_\infty|)^{1+\Omega} > 2^{\frac{1}{u}},$$

puis, en tenant compte de l'égalité (3.15)

$$P^d\,|\,\xi_\infty\,| > 2^{\frac{1}{d(1+\Omega)-2}}.$$

Mais pour $1 < P^d\,|\,\xi_\infty\,| \leqslant 2^{\frac{1}{d(1+\Omega)-2}}$, l'inégalité proposée dans ce lemme revient au résultat trivial (3.12) quitte à augmenter la constante impliquée dans le symbole « $\ll$ ».

Ainsi pouvons-nous considérer que l'égalité (3.14) est justifiée.

F) Avec les inégalités (3.3) et (3.13) ainsi que l'égalité (3.14), on obtient

$$\begin{aligned} |\,F^*_\infty(\xi_\infty)\,| &\ll P^{-\varepsilon}(P^d|\xi_\infty|)^{\varepsilon+\varepsilon\Omega-\Omega}\,P^{n+\varepsilon} + P^{n-1}\,P(P^d|\xi_\infty|)^{1-1-\Omega} \\ &\ll P^n(P^d|\xi_\infty|)^{-\Omega+\varepsilon(\Omega+1)}. \end{aligned}$$

En posant ε au lieu de $\varepsilon(\Omega+1)$, on obtient

$$|F^*_\infty(\xi_\infty)| \ll P^n[\mathrm{Max}(1, P^d|\xi_\infty|)]^{-\Omega+\varepsilon}.$$

La démonstration de ce lemme est donc terminée. □

Remarque. Le résultat du lemme 3.2 est utile pour $|\xi_\infty|$ très grand; donc z peut-être très grand. C'est la raison pour laquelle l'ensemble

$$zP\left(\mathscr{B}-\frac{x}{P}\right) = zP\mathscr{B} - zx$$

ne peut être assimilé à l'ensemble $zP\mathscr{B}$ car, bien que x soit dans le support de θ dont on a suffisamment dit qu'il peut être aussi petit qu'on le désire *mais fixé*, zx peut être grand.

Dans la démonstration de Birch cet inconvénient n'apparaît pas car Birch utilise $\varphi_\infty = 1_{P\mathscr{B}}$ ce qui revient à poser $\theta = \delta_0$, distribution de Dirac en 0, dont le support est $\{0\}$ ce qui entraîne $zx = 0$ pour tout z.

Mais le choix de Birch, pour la fonction φ_∞, ne conduit pas à une fonction de Schwarz-Bruhat et ruine le paragraphe 1 de ce travail qui utilise une formule de Poisson.

Puisque nous avons choisi le support de θ comme un voisinage compact *fixé* de 0, il nous faut utiliser la boîte $\mathscr{B} - \dfrac{x}{P}$ au lieu de la boîte $\mathscr{B}$, ce qui exige dans l'hypothèse (H1) l'indépendance du résultat obtenu pour $\mathscr{B}$ appartenant à un domaine borné de $\mathbf{R}^n$.

Birch signale cette indépendance dans la remarque qui suit la démonstration du corollaire de son lemme 4.3: « Note that this corollary does not depend on the box $\mathscr{B}$ being contained in $\mathscr{E}$ »; mais il ne s'en sert jamais puisque, tout au long de ses démonstrations, il utilise la même boîte $\mathscr{B}$ quitte, le moment venu, à la choisir convenablement!

Par commodité nous noterons $\mathbf{A} = \mathbf{R} \times \mathbf{A}_f$, où $\mathbf{A}_f$ est le produit restreint des $\mathbf{Q}_p$ ou $\mathbf{Z}_p$ pour toutes les places finies de $\mathbf{Q}$. On désigne habituellement $\mathbf{A}_f$ comme l'ensemble des adèles finis.

La mesure de Haar considérée sur $\mathbf{A}_f^r$ est $\bigotimes_p d\xi_p$ et sera notée $d\xi_f$, ainsi a-t-on $d\xi = d\xi_\infty \otimes d\xi_f$.

LEMME 3.3. *Avec les notations précédentes, l'intégrale* $\displaystyle\int_{\mathbf{A}_f^r} Q(\xi)^{-\alpha}\, d\xi_f$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > r + 1$.

Démonstration. Puisque la fonction $Q(\xi) = \prod_p \mathrm{Max}(1, |\xi_p|_p)$ ne dépend pas de ξ_∞ mais seulement de ξ_f, l'intégrale étudiée apparaît dans de nombreux calculs et sa convergence est un souci légitime.

Tout d'abord il vient, pour tout entier $k \geqslant 0$,

$$\int_{\mathrm{Max}(1, |\xi_p|_p) \leqslant p^k} d\xi_p = \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} \int_{|\xi_{ip}|_p \leqslant p^k} d\xi_{ip} = p^{kr}.$$

Donc, pour $k \geqslant 1$, on obtient

$$\int_{|\xi_p|_p = p^k} d\xi_p = p^{kr} - p^{(k-1)r}.$$

Il en résulte le calcul suivant qui n'est possible que pour $\alpha > r$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{Q}_p^r} [\mathrm{Max}(1, |\xi_p|_p)]^{-\alpha} d\xi_p &= \int_{\mathbf{Z}_p^r} d\xi_p + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|\xi_p|_p = p^k} |\xi_p|_p^{-\alpha} d\xi_p \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p^{-k\alpha}[p^{kr} - p^{(k-1)r}] \\
&= 1 + (1 - p^{-r}) \sum_{k=1}^{\infty} p^{k(r-\alpha)} \\
&= 1 + (1 - p^{-r}) \frac{p^{r-\alpha}}{1 - p^{r-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Puisque nous avons l'égalité

$$\int_{\mathbf{A}_f^r} Q(\xi)^{-\alpha} d\xi_f = \prod_p \int_{\mathbf{Q}_p^r} [\mathrm{Max}(1, |\xi_p|_p)]^{-\alpha} d\xi_p$$

il faut étudier la convergence du produit infini de terme général $(1 + u_p)$, avec

$$u_p = p^{r-\alpha} \frac{1 - p^{-r}}{1 - p^{r-\alpha}},$$

qui est équivalente à la convergence de la série de terme général $u_p \sim p^{r-\alpha}$, d'où la condition classique

$$\alpha - r > 1$$

qui achève la démonstration. □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème auquel ce paragraphe 3 est consacré.

THÉORÈME 3. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *pour tout* $\Delta > 0$, *il existe* $\delta_3 > 0$ *tel que, pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}^r$, *on ait*

$$\int_{\mathbf{A}^r - M(\Delta)} F^*(\xi)\, \psi(<\xi, -\nu>) d\xi = O(P^{n-rd-\delta_3}).$$

Démonstration. Définissons les quatre intégrales suivantes

$$I_\infty(P) = \int_{|\xi_\infty| > P^{-d+\Delta}} |F^*_\infty(\xi_\infty)|\, d\xi_\infty ,$$

$$J_f = \int_{\mathbf{A}^r_f} |F^*_f(\xi_f)|\, d\xi_f ,$$

$$K_\infty = \int_{\mathbf{R}^r} |F^*_\infty(\xi_\infty)|\, d\xi_\infty ,$$

$$L_f(P) = \int_{Q(\xi) > P^\Delta} |F^*_f(\xi_f)|\, d\xi_f .$$

Nous avons l'inégalité

$$(3.16) \qquad \left| \int_{\mathbf{A}^r - M(\Delta)} F^*(\xi)\, \psi(<\xi, -\nu>) d\xi \right| \leqslant \int_{\mathbf{A}^r - M(\Delta)} |F^*(\xi)|\, d\xi \leqslant I_\infty(P)\, J_f + K_\infty\, L_f(P).$$

Il nous reste à majorer les quatre intégrales définies ci-dessus.

1) En utilisant le lemme 3.2, il vient

$$I_\infty(P) \ll \int_{|\xi_\infty| P^d > P^\Delta} P^n (|\xi_\infty| P^d)^{-\Omega+\varepsilon}\, d\xi_\infty$$

$$\ll P^{n-\Omega d+\varepsilon d} \int_{\Gamma \geqslant P^{-d+\Delta}} \Gamma^{-\Omega+\varepsilon}\, \Gamma^{r-1}\, d\Gamma$$

$$\ll P^{n-\Omega d+\varepsilon d} \int_{\Gamma \geqslant P^{-d+\Delta}} \Gamma^{-2}\, d\Gamma \ll P^{n-rd-\Delta}.$$

Ce calcul n'est autre que celui dit des « surfaces de niveaux » dans $\mathbf{R}^r$ et puisque $|\xi_\infty| = \operatorname{Max}_i |\xi_{i\infty}|$, les surfaces de niveaux sont ici des hyper-cubes. De plus l'hypothèse (H2), à savoir $\Omega > r + 1$, est utilisée pour obtenir les deux dernières inégalités. Enfin on aura choisi $\varepsilon < \Omega - r - 1$.

2) Avec les notations du paragraphe 1 de ce travail, il vient

$$F_f^*(\xi_f) = \prod_p \int_{\mathbf{Q}_p^n} \varphi_p(x_p)\,\psi_p(<\xi_p, f(x_p)>)dx_p = \prod_p \hat{h}_p(0)\,.$$

Donc, en utilisant le lemme 1.2, on obtient

$$J_f \ll \int_{\mathbf{A}_f^r} Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon}\, d\xi_f$$

et cette dernière intégrale est convergente selon le lemme 3.3, l'hypothèse (H2) et le choix de $\varepsilon < \Omega - r - 1$.

3) On a

$$K_\infty = \int_{|\xi_\infty| \leqslant P^{-d}} |\, F_\infty^*(\xi_\infty)\,|\, d\xi_\infty + \int_{|\xi_\infty| > P^{-d}} |\, F_\infty^*(\xi_\infty)\,|\, d\xi_\infty\,;$$

or

$$\int_{|\xi_\infty| \leqslant P^{-d}} |\, F_\infty^*(\xi_\infty)\,|\, d\xi_\infty \ll \int_{|\xi_\infty| \leqslant P^{-d}} P^n\, d\xi_\infty \ll P^{n-rd}\,,$$

et, en reprenant le calcul concernant $I_\infty(P)$ mais avec $\Delta = 0$, on obtient

$$\int_{|\xi_\infty| > P^{-d}} |\, F_\infty^*(\xi_\infty)\,|\, d\xi_\infty \ll P^{n-rd}\,,$$

d'où

$$K_\infty \ll P^{n-rd}$$

4) Comme pour l'intégrale J_f, nous avons la majoration

$$L_f(P) \ll \int_{Q(\xi) > P^\Delta} Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon}\, d\xi_f\,.$$

Choisissons cette fois $\varepsilon < \frac{1}{2}(\Omega - r - 1)$, alors on a

$$L_f(P) \ll P^{-\varepsilon\Delta} \int_{Q(\xi) > P^\Delta} Q(\xi)^{-\Omega+2\varepsilon}\, d\xi_f \ll P^{-\varepsilon\Delta}\,.$$

Cette dernière inégalité est une conséquence de la convergence de l'intégrale

$$\int_{\mathbf{A}_f^r} Q(\xi)^{-\Omega+2\varepsilon}\, d\xi_f \, .$$

Enfin nous pouvons appliquer à l'inégalité (3.16) les quatre majorations obtenues ci-dessus. Il vient

$$\left| \int_{\mathbf{A}^r - M(\Delta)} F^*(\xi)\, \psi\,(<\xi, -\nu>)\, d\xi \right| \ll P^{n-rd-\varepsilon\Delta} .$$

En posant $\delta_3 = \varepsilon\Delta$ on achève cette démonstration. □

§ 4. Série singulière et intégrale singulière

Une conséquence évidente du Théorème 3 est que la transformée de Gauss globale F^* est intégrable sur $\mathbf{A}^r$. Ainsi sa transformée de Fourier, notée $\widehat{F^*}$, existe. Nous pouvons donc obtenir, grâce aux Théorèmes 1, 2 et 3, le résultat asymptotique suivant qui est essentiel dans ce travail.

Proposition 4.1. *Sous les hypothèses (H1) et (H2) et en utilisant les notations introduites dans les précédents paragraphes, il vient :*

Pour toute boîte $\mathscr{B} \in \mathscr{S}$, *pour tout* $P \in \mathscr{P}(\mathscr{B})$, *pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}^r$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ f(x)=\nu}} \varphi_\infty(x) = \widehat{F^*}(-\nu) + O(P^{n-rd-\delta}) \tag{4.1}$$

et le membre de gauche de cette égalité est égal au nombre de $x \in P\mathscr{B} \cap \mathbf{Z}^n$ *et tels que* $f(x) = \nu$.

Démonstration. On a déjà expliqué, dans l'introduction de ce travail, l'égalité essentielle

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi)\, \psi\,(<\xi, -\nu>) d\xi = \sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ f(x)=\nu}} \varphi_\infty(x) .$$

Compte tenu du sens donné au paragraphe 2 aux ensembles $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}(\mathscr{B})$, le membre de droite de cette dernière égalité est exactement le nombre de solutions entières du système $f(x) = \nu$, situées dans la boîte $P\mathscr{B}$.