Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE ET PRINCIPE DE HASSE FIN POUR CERTAINS SYSTÈMES DE FORMES

Autor: Danset, Renaud

Kapitel: A) Sur les hypothèses (H1) et (H2)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54555

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 5. Exemples d'applications

A) Sur les hypothèses (H1) et (H2)

La justification de l'hypothèse (H1) provient de l'emploi de l'inégalité de Weyl et de ses généralisations pour majorer des sommes trigonométriques du type $S(\alpha)$. Il semble que, *pour de telles sommes*, ce soit la seule méthode efficace actuellement connue. L'adjectif « efficace » étant un exemple d'euphémisme.

Le but de ce travail n'étant pas de recopier Birch ou Davenport, mieux valait se situer en aval, c'est-à-dire partir de l'hypothèse (H1), quitte à indiquer ici la méthode qui y conduit, sans démonstrations mais avec des références bibliographiques qui sont les suivantes:

Birch, « Forms in many variables », paragraphe 2, lemmes 2.1 à 2.5.

Davenport, « Cubic forms in 32 variables », paragraphes 3 et 4.
« Cubic forms in 16 variables », paragraphes 4 et 5.
« Analytic Methods... », paragraphes 3 et 13.

Pour le reste, il faut d'abord remarquer que la démonstration de l'inégalité de Weyl utilise une succession de différences finies (autant que le degré d des formes f_i) portant sur les polynômes présents dans l'exposant de e (les polynômes f_i et g en ce qui nous concerne) d'où un résultat *indépendant* du polynôme g puisque son degré est inférieur strictement à d. Ainsi la disparition du polynôme g dans l'hypothèse (H1), qui ne présente aucun inconvénient pour les paragraphes 1 à 4 du présent travail, n'a pas d'intérêt tant que la méthode de Weyl demeurera la seule qui puisse justifier l'hypothèse (H1).

L'inégalité de Weyl une fois obtenue, on utilise un résultat de géométrie des nombres (Birch lemme 2.3, Davenport « 32 variables » lemme (3.3) « 16 variables » lemme 8) avant d'aboutir à un *lemme à trois possibilités* (Birch lemme 2.5, Davenport « Analytic methods », lemme 32, Schmidt « Simultaneous rational zeros... », lemme 3).

La première possibilité est une bonne majoration du module de $S(\alpha)$ du type P^{n-k} où $k > 0$ est un paramètre.

La seconde possibilité est une bonne approximation rationnelle de α, précisément celle de l'hypothèse (H1) ii), associée à un second paramètre $\Delta > 0$.

La troisième possibilité est la mauvaise: celle qui ne garantit aucune des deux précédentes. Toutefois elle exprime une condition (compliquée) qui ne concerne pas α mais seulement les formes f_i.

Ainsi, chez tous les auteurs la règle est-elle la même: attribuer aux formes f_i une propriété T, plus ou moins laide, qui soit suffisante pour exclure la troisième possibilité et donc garantir l'hypothèse (H1) qui n'est autre que l'union des deux premières possibilités (poser $k=\Delta\Omega$)!

Mais ce n'est pas suffisant car pour exploiter convenablement, par la méthode du cercle de Hardy et Littlewood, l'hypothèse (H1) il faut disposer d'un bon accord entre les paramètres k et Δ, plus précisément de l'hypothèse (H2):

$$\frac{k}{\Delta} = \Omega > r + 1 .$$

Ainsi équipé le système f peut affronter la « machinerie » de la méthode du cercle dont le présent travail donne un exposé adélique. On obtient ainsi la formule asymptotique de la Proposition 4.1 (Birch lemme 5.5, Davenport « 16 variables » lemme 16, etc.).

Encore doit-on s'assurer que le terme principal de cette formule asymptotique n'est pas nul. C'est la raison des hypothèses (H3) et (H4). Hélas la vérification de (H3) est un problème difficile et tout simplement non résolu dès qu'on quitte les cas particuliers.

En résumé, pour obtenir des exemples d'application, il faut atteindre deux objectifs:

1° Trouver une propriété T du système f qui implique (H1) et aussi (H2).

2° Vérifier (H3) et éventuellement (H4).

B) Sur le travail de Birch

Ce dernier consacre son paragraphe 3 à la définition d'une propriété T en termes de géométrie algébrique.

Soit l'application polynomiale $f: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^r$ (on prend ici le corps $\mathbf{C}$ parce qu'il est algébriquement clos). Birch note

$$V^* = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \operatorname{rang}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) < r\}$$

la variété des points singuliers de f (rappel: $r \geqslant n$).

Il obtient ainsi la propriété T suivante:

$$n - \dim V^* > 2^{d-1}\, r(d-1)\Omega$$