B) SUR LE TRAVAIL DE BIRCH

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Ainsi, chez tous les auteurs la règle est-elle la même: attribuer aux formes f_i une propriété T, plus ou moins laide, qui soit suffisante pour exclure la troisième possibilité et donc garantir l'hypothèse (H1) qui n'est autre que l'union des deux premières possibilités (poser $k = \Delta\Omega$)!

Mais ce n'est pas suffisant car pour exploiter convenablement, par la méthode du cercle de Hardy et Littlewood, l'hypothèse (H1) il faut disposer d'un bon accord entre les paramètres k et Δ, plus précisément de l'hypothèse (H2):

$$\frac{k}{\Delta} = \Omega > r + 1 .$$

Ainsi équipé le système f peut affronter la « machinerie » de la méthode du cercle dont le présent travail donne un exposé adélique. On obtient ainsi la formule asymptotique de la Proposition 4.1 (Birch lemme 5.5, Davenport « 16 variables » lemme 16, etc.).

Encore doit-on s'assurer que le terme principal de cette formule asymptotique n'est pas nul. C'est la raison des hypothèses (H3) et (H4). Hélas la vérification de (H3) est un problème difficile et tout simplement non résolu dès qu'on quitte les cas particuliers.

En résumé, pour obtenir des exemples d'application, il faut atteindre deux objectifs:

1° Trouver une propriété T du système f qui implique (H1) et aussi (H2).

2° Vérifier (H3) et éventuellement (H4).

B) Sur le travail de Birch

Ce dernier consacre son paragraphe 3 à la définition d'une propriété T en termes de géométrie algébrique.

Soit l'application polynomiale $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^r$ (on prend ici le corps $\mathbf{C}$ parce qu'il est algébriquement clos). Birch note

$$V^* = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \mathrm{rang}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) < r\}$$

la variété des points singuliers de f (rappel: $r \geqslant n$).

Il obtient ainsi la propriété T suivante:

$$n - \dim V^* > 2^{d-1} r(d-1)\Omega$$

qui implique l'hypothèse (H1). En ajoutant l'hypothèse (H2) on obtient donc la condition suffisante de Birch:

(5.1) $$\operatorname{codim} V^* > r(r+1)(d-1)2^{d-1}\,.$$

Un cas intéressant (Birch, paragraphe 7, Théorème 2) est $r = 1$, car alors l'égalité d'Euler pour les polynômes homogènes montre que V^* est l'ensemble des points singuliers de $V(0) = \{x \in \mathbf{C}^n \mid f(x) = 0\}$ (c'est faux en général pour $r \geqslant 2$ où V^* est assez difficile à connaître). On obtient dans ce cas

(5.2) $$\operatorname{codim} V^* > (d-1)2^d\,.$$

Bien entendu la vérification des conditions (5.1) ou (5.2) dans des cas généraux est difficile. Birch ne propose d'ailleurs aucun exemple précis et ne s'attaque pas davantage aux hypothèses (H3) et (H4), l'avant-dernière étant inaccessible dans un cadre aussi général.

C) Sur les hypothèses (H3) et (H4)

Voici un contre-exemple simple qui permet de comprendre pourquoi l'hypothèse (H4) ne peut être à l'image de l'hypothèse (H3), à savoir

(H'4) Il existe un point non singulier de $V(\nu) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = \nu\}$.

Considérons la forme $f(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, alors nous avons $r = 1$, $d = 2$ et $V^* = \{0\}$. Ainsi, d'après le travail de Birch et l'inégalité (5.2) ci-dessus, les hypothèses (H1) et (H2), sont vraies pour $n > 4$.

Soit $\nu \in \mathbf{N}^*$, d'après le Théorème de Lagrange, la variété réelle $V(\nu)$ admet des solutions entières pour $n \geqslant 4$. Ainsi le système $f = \nu$ possède des solutions dans $\mathbf{Z}_p^n$, pour tout p, évidemment non singulières puisque $\nu \neq 0$ et l'hypothèse (H3) est vérifiée.

Puisque l'hypothèse (H'4) est clairement vraie, si elle était la bonne hypothèse à retenir, on obtiendrait une infinité de solutions entières pour tout $n > 4$, ce qui est faux puisque $V(\nu)$ est bornée dans $\mathbf{R}^n$.

D'ailleurs, la même impossibilité concerne toutes les variétés bornées de $\mathbf{R}^n$: il faut des points à l'infini réels pour espérer une infinité de solutions entières, c'est-à-dire un point réel non nul dans $V(0)$ et non dans $V(\nu)$.

Comme pour espérer des solutions entières il faut des solutions dans $\mathbf{Z}_p^n$ pour tout p, on comprend mieux les hypothèses (H3) et (H4) tout en notant qu'elles demandent chacune l'existence de *points non singuliers* ce qui est plus exigeant que la simple nécessité.