D) SUR LES TRAVAUX DE DAVENPORT

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

D) Sur les travaux de Davenport

Il est le grand spécialiste de la méthode du cercle, il en vit toutes les subtilités ! et le travail de Birch généralise son « Cubic forms in 32 variables ».

Le but poursuivi est le

Théorème. Toute forme cubique ayant au moins N variables et à coefficients entiers représente zéro.

D'où trois articles de Davenport pour successivement $N = 32$, 29 et enfin 16.

Il faut d'abord remarquer qu'il s'agit d'une démonstration par l'absurde. En effet, la formule asymptotique que fournit la méthode du cercle est manifestement fausse pour beaucoup de formes (par exemple les formes dégénérées qui sont rationnellement équivalentes à des formes comprenant moins de variables: le terme principal est en P^{n-d} avec n, nombre de variables !). Il convient donc de les exclure ce qui peut se faire pour $d = 3$ (cette chance ne se poursuit pas pour $d > 3$) en supposant seulement que les formes étudiées ne représentent pas zéro.

S'il est possible d'appliquer la méthode du cercle, on obtiendra une évidente contradiction (une infinité de solutions entières pour des formes qui ne représentent pas zéro !) et donc le théorème recherché.

L'hypothèse (H4) ne coûte pas cher justement parce que la forme cubique $C(x)$ ne représente pas zéro (Davenport « 32 variables », lemme 6.1).

L'hypothèse (H3) est connue de Davenport qui rappelle, dans le paragraphe 2 de son « 32 variables », sa démonstration de l'existence pour toute forme cubique ayant au moins 10 variables, d'une solution non singulière dans $\mathbf{Q}_p$, pour tout p. (Ce résultat a été cité au paragraphe A de l'Introduction).

Toute l'habileté réside donc dans la définition d'une bonne propriété T qui entraîne les hypothèses (H1) et (H2).

Dans « 32 variables », au lemme 4.2, Davenport propose, pour une forme cubique $C(x)$ à coefficients entiers, la propriété T_1 suivante:

« Ne pas représenter zéro et ne pas être équivalente (par $GL_n(\mathbf{Q})$) à une forme du type $a_0 u_0^3 + C_1(u_1, ..., u_m)$, en $(m+1)$ variables $u_0, u_1, ..., u_m$, où m est le plus petit entier supérieur ou égal à $n - 4\Omega$ (rappel: $\Omega = \dfrac{k}{\Delta}$) ».

C'est loin d'être beau, mais cela fonctionne, après de nombreux efforts que Davenport améliore dans son « 29 variables » sans toutefois modifier la propriété T_1.

Enfin dans l'article « 16 variables », Davenport propose, au lemme 13, la propriété T_2:

« Ne pas représenter zéro et ne pas être équivalente (par $GL_n(\mathbf{Q})$) à une forme du type $C_1(u_1, ..., u_{n-r}) + C_2(v_1, ..., v_r)$ pour $1 \leqslant r \leqslant n-1$ ».

Non seulement T_2 est plus simple que T_1 mais la démonstration associée simplifie nettement les précédentes. Enfin si C est rationnellement équivalente à $C_1(u_1, ..., u_{n-r}) + C_2(v_1, ..., v_r)$, les sommes $S(\alpha)$ construites sur C sont le produit des mêmes sommes construites sur C_1 et C_2 et on obtient un raisonnement rapide par itération qui conduit au pire sur les formes diagonales connues depuis longtemps: un bien joli travail de précision!

Malheureusement aucune généralisation pour $d \geqslant 4$ ne paraît possible (dixit Davenport).

Enfin Davenport fait remarquer que pour démontrer le cas $N = 17$, sa démonstration est encore plus simple et qu'il suffit de la propriété T_3:

« Ne pas représenter zéro »

(cf. Davenport, « Analytic Methods... », Lemme 36).

E) Sur les travaux de W. M. Schmidt

Dans son article « Simultaneous rational zeros of quadratic forms », W. M. Schmidt considère le système $f = 0$ pour r formes quadratiques à coefficients entiers.

Soit $\mathbf{Q}(f) = \{\mu_1 f_1 + ... + \mu_r f_r \mid (\mu_1, ..., \mu_r) \in \mathbf{Q}^r - \{0\}\}$ le pinceau rationnel engendré par f.

Soit $\mathbf{C}(f) = \{\mu_1 f_1 + ... + \mu_r f_r \mid (\mu_1, ..., \mu_r) \in \mathbf{C}^r - \{0\}\}$ le pinceau complexe engendré par f.

Dans son lemme 6, pour obtenir les hypothèses (H1) et (H2), Schmidt propose la propriété T_1:

« Pour tout $g \in \mathbf{Q}(f)$, on a rang $g > 2r^2 + 3r$ ».

Il consacre à l'hypothèse (H3) son paragraphe 5 où il utilise les théorèmes 2 et 6 de son article « Simultaneous p-adic zeros of quadratic forms ». Il parvient ainsi à la propriété T_2:

« Pour tout $g \in \mathbf{Q}(f)$, on a rang $g > 4r^3 + r^2$ »

qui implique donc les hypothèses (H3), (H2) et (H1).

Enfin il montre que la propriété T_3:

« Pour tout $g \in \mathbf{C}(f)$, on a rang $g > 4r^2 + 4r$ »

implique la propriété T_2. Il en déduit son principal résultat:

$\{(H_4) \text{ et } T_3\} \Rightarrow \{\text{le système } f \text{ représente zéro}\}$.