Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DU CAP-PRODUIT À COEFFICIENTS LOCAUX

Autor: Hausmann, Jean-Claude / Zahnd, Antoine

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54557

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 31 (1985), p. 71-79

PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DU CAP-PRODUIT À COEFFICIENTS LOCAUX

par Jean-Claude HAUSMANN et Antoine ZAHND

Soit X un CW-complexe connexe par arc et soient M et N deux $\pi_1(X)$-modules. Le but de cet article est de caractériser la famille d'applications « cap-produit »:

$$H_i(X; M) \times H^k(X; N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$
$$(z, \alpha) \mapsto z \cap \alpha$$

par quatre de ses propriétés: naturalité en X, comportement par rapport aux suites exactes courtes de coefficients (en M et en N) ainsi que description explicite en dimension $i = k = 0$. La caractérisation est complète, sauf peut-être dans le cas $i = k > 0$ où notre technique nécessite l'hypothèse que M est sans $\mathbf{Z}$-torsion ou que N est un $F\pi_1(X)$-module pour un corps F (Théorème (2.1)).

Un point essentiel de notre démonstration est l'utilisation du théorème de Kan-Thurston [KT] qui permet de se ramener au cas où X est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$. Dans ce cas, la naturalité en X n'est même plus nécessaire (Proposition (2.2)).

Le § 3 contient quelques remarques et suggestions d'applications.

Les auteurs remercient M. Kervaire pour d'utiles conversations.

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DU CAP-PRODUIT

Soit X un CW-complexe. Soit $S_j(X)$ l'ensemble des j-simplexes singuliers de X, i.e. des applications continues $\sigma: \Delta^j \to X$, où

$$\Delta^j = \{(x_0, ..., x_j) \in \mathbf{R}^{j+1} \mid x_r \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \Sigma x_r = 1\}.$$

Le groupe $C_j(X)$ des j-chaînes singulières de X est le groupe abélien libre de base $S_j(X)$. Pour $i, k \leqslant j$, on définit la i^e face avant ${}^i\sigma: \Delta^i \to X$ et la k^e face arrière $\sigma^k: \Delta^k \to X$ de $\sigma \in S_j(X)$ de la façon habituelle:

$$^i\sigma(x_0, \dots x_i) = \sigma(x_0, \dots x_i, 0, \dots, 0)$$
$$\sigma^k(x_0, \dots, x_k) = \sigma(0, \dots, 0, x_0, \dots, x_k)$$

Supposons dorénavant que X est connexe par arc et soit $\tilde{X}$ son revêtement universel. L'action de $\pi = \pi_1(X)$ sur $\tilde{X}$ munit le groupe $C_j(\tilde{X})$ d'une structure de π-module (à gauche). Ce π-module est π-libre de base $\{\tilde{\sigma} \mid \sigma \in S_j(X)\} \subset S_j(\tilde{X})$, où $\tilde{\sigma} \in S_j(\tilde{X})$ est un relevé de $\sigma \in S_j(X)$. L'opérateur bord ∂: $C_j(\tilde{X}) \to C_{j-l}(\tilde{X})$ est l'application π-linéaire définie sur $\tilde{\sigma} \in S_j(\tilde{X})$ par

$$\partial\tilde{\sigma}(x_0, \dots, x_{j-1}) = \sum_{r=0}^{j} (-1)^r \tilde{\sigma}(x_0, ., x_{r-1}, 0, x_r, \dots, x_{j-1}).$$

Soit M un π-module à droite. Le groupe d'homologie $H_r(X; M)$ est défini comme le r^e groupe d'homologie du complexe

$$(M \otimes_\pi C_*(\tilde{X}); id_M \otimes_\pi \partial).$$

Si N est un π-module à gauche, le groupe de cohomologie $H^r(\tilde{X}; N)$ est le r^e groupe d'homologie du complexe $(Hom_\pi(C_*(\tilde{X}); N); \delta)$, où $\delta(\alpha)(z) = (-1)^r \cdot \alpha(\partial(z))$ pour $z \in C_r(\tilde{X})$.

Le cap produit:

$$\cap : (M \otimes_\pi C_i(\tilde{X})) \times Hom_\pi(C_k(\tilde{X}); N) \to (M \otimes N) \otimes_\pi C_{i-k}(\tilde{X})$$

est l'application $\mathbf{Z}$-bilinéaire qui, pour $m \in M$, $\tilde{\sigma} \in S_i(\tilde{X})$ et $\alpha \in Hom_\pi(C_k(\tilde{X}); N)$ a pour définition:

$$(m \otimes_\pi \tilde{\sigma}) \cap \alpha = (m \otimes \alpha(^k\tilde{\sigma})) \otimes_\pi \tilde{\sigma}^{i-k}.$$

Le symbole $\otimes$ dénote le produit sur $\mathbf{Z}$ par opposition à $\otimes_\pi$ qui désigne celui sur $\mathbf{Z}\pi$. Le groupe $M \otimes N$ est muni de la structure de π-module à droite donnée par $(m \otimes n)g = mg \otimes g^{-1}n$. Grâce à cette structure, on vérifie immédiatement que l'application « cap-produit » ci-dessus est bien définie. Un calcul direct donne la formule:

$$\partial(e \cap \alpha) = (-1)^k \partial e \cap \alpha + e \cap \delta\alpha, e = m \otimes_\pi z \in M \otimes_\pi C_i(\tilde{X}).$$

Cette formule montre que le cap-produit ci-dessus induit un cap-produit en homologie:

$$\cap : H_i(X; M) \times H^k(X; N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

Parmi les nombreuses propriétés classiques du cap-produit, nous allons en dégager quatre que nous prouverons être caractéristiques au § 3. Nous introduisons directement le langage qui sera utilisé au § 3.

(1.1) PROPOSITION. *La famille d'applications*

$$\Phi_X^{ik}(M, N): H_i(X; M) \times H^k(X, N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

donnée par le cap-produit $\Phi_X^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$ *satisfait aux propriétés I, II, III et IV décrite ci-dessous.*

Propriété I: Soit $f: X \to Y$ une application continue entre CW-complexes connexes par arc. Soit M un $\pi_1(Y)$-module à droite et N un $\pi_1(Y)$-module à gauche, qui seront aussi considérés au besoin comme $\pi_1(X)$-modules via l'homomorphisme $\pi_1 f$. Alors, pour tout $z \in H_i(X; M)$ et $\alpha \in H^k(Y; N)$ on a la formule:

$$f_* \Phi_X^{ik}(M, N)(z, f^*(\alpha)) = \Phi_Y^{ik}(M, N)(f_*(z), \alpha).$$

Propriété II: Soit $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ une suite exacte de π-modules à gauche. Soit M un π-module à droite et S le π-module $ker(M \otimes N \to M \otimes N'')$. On a donc une suite exacte courte

$$0 \to S \to M \otimes N \to M \otimes N'' \to 0$$

et une surjection $\mu: M \otimes N' \twoheadrightarrow S$. Alors, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
H_i(X; M) \times H^k(X; N'') \arrow[r, "\Phi_X^{ik}(M, N'')"] \arrow[dd, "\mathrm{id} \times \delta"'] & H_{i-k}(X; M \otimes N'') \arrow[dr, "\partial"] & \\
& & H_{i-k-1}(X; S) \\
H_i(X; M) \times H^{k+1}(X; N') \arrow[r, "\Phi_X^{i(k+1)}(M, N')"] & H_{i-k-1}(X; M \otimes N') \arrow[ur, "\mu_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Propriété III: Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de π-modules à droite. Soit N un π-module à gauche et T le π-module $ker(M \otimes N \to M'' \otimes N)$. On a donc une suite courte $0 \to T \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ et une surjection $\nu: M' \otimes N \twoheadrightarrow T$. Alors, le diagramme suivant est $(-1)^k$-commutatif:

$$\begin{tikzcd}
H_i(X, M'') \times H^k(X; N) \arrow[r, "\Phi_X^{ik}(M'', N)"] \arrow[d, "\partial \times \mathrm{id}"'] & H_{i-k}(X; M'' \otimes N) \arrow[dr, "\partial"] & \\
H_{i-1}(X; M') \times H^k(X; N) \arrow[r, "\Phi_X^{(i-1)k}(M', N)"] & H_{i-k-1}(X; M' \otimes N) \arrow[r, "\upsilon_*"] & H_{i-k-1}(X; T)
\end{tikzcd}$$

Pour énoncer la propriété IV on utilise les identifications classiques:

$$H_0(X; M) = M \Big/ \{m - m\alpha \mid m \in M, \alpha \in \mathbf{Z}\pi\},$$

$$H^0(X; N) = \{n \in N \mid gn = n \quad \text{pour tout} \quad g \in \pi\} \subset N.$$

On vérifie que l'application $M \times H^0(X; N) \subset M \times N \to M \otimes N$ donnée par $(m, n) \to m \otimes n$ produit, par passage aux quotients, une application $H_0(X; M) \times H^0(X; N) \to H_0(X; M \otimes N)$ que l'on notera $(m, n) \mapsto m \overline{\otimes} n$.

Propriété IV: $\phi_X^{00}(M, N)(m, n) = m \overline{\otimes} n$.

2. Le théorème de caractérisation

(2.1) Théorème. *Soit*

$$\phi_X^{ik}(M, N): H_i(X; M) \times H^k(X; N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

une famille d'applications définies pour tout $i, k \geqslant 0$ *et tout triple* (X, M, N), *où* X *est un CW-complexe connexe par arc,* M *un* $\pi_1(X)$*-module à droite et* N *un* $\pi_1(X)$*-module à gauche. Supposons que la famille* $\phi_X^{ik}(M, N)$ *satisfait aux propriétés I à IV. Alors* $\phi_X^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$, *sauf peut-être lorsque* $i = k > 0$. *Cette dernière restriction est inutile lorsque* M *est sans* $\mathbf{Z}$*-torsion ou que* N *est un* $F\pi_1(X)$*-module pour un corps* F.

Le reste de ce paragraphe est dévolu à la démonstration du théorème (2.1). Un théorème de Kan-Thurston [KT] affirme que, pour tout

CW-complexe connexe par arc X, on peut trouver une application $f^X: TX \to X$ telle que:

a) $f^X_*: H_*(TX; P) \to H_*(X; P)$ est un isomorphisme pour tout $\pi_1(X)$-module P

b) $TX = K(\pi_1(TX), 1)$, i.e. TX est contractile.

Ce résultat permet de réduire la démonstration du théorème (2.1) au cas d'espace d'Eilenberg-McLane. Le cas général découlera du calcul suivant (avec les abréviations $\phi^{ik}_X = \phi^{ik}_X(M, N)$ et $f = f^X$):

$$\phi^{ik}_X(z, \alpha) = \phi^{ik}_X(f_*(y), \alpha) = f_*\phi^{ik}_{TX}(y, f^*(\alpha)) = f_*(y \cap f^*(\alpha)) = z \cap \alpha .$$

La propriété I ne sera plus utilisée, car nous allons démontrer la proposition suivante:

(2.2). PROPOSITION. *Soit* $X = K(\pi, 1)$. *Soit*

$$\phi^{ik}(M, N): H_i(X; M) \times H^k(X; N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

une famille d'applications définies pour tout $i, k \geqslant 0$, *tout* π*-module à droite* M *et tout* π*-module à gauche* N. *Si* $\phi^{ik}(M, N)$ *satisfait aux propriétés II, III et IV, alors* $\phi^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$, *sauf peut-être pour* $i = k > 0$. *Lorsque* M *est sans* **Z***-torsion ou que* N *est un* $F\pi$*-module pour un corps* F, *on a également* $\phi^{ii}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$.

Démonstration. Considérons les énoncés suivants:

$\mathscr{H}(i, k)$: $\phi^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$, pour toute paire (M, N) de π-modules comme dans l'énoncé de (2.2).

$\mathscr{H}^t(i, k)$: $\phi^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$ pour toute paire (M, N) de π-modules comme dans l'énoncé de (2.2), avec M sans **Z**-torsion ou N un $F\pi$-module.

L'hypothèse $\mathscr{H}(0, 0)$ est vraie: elle est équivalente à la propriété IV. On va démontrer tout d'abord les deux lemmes suivants:

LEMME 1. *Pour tout* $i \geqslant k \geqslant 0$ $\mathscr{H}^t(i, k)$ *entraîne* $\mathscr{H}^t(i, k+1)$.

LEMME 2. $\mathscr{H}^t(i, 0)$ *entraîne* $\mathscr{H}^t(i+1, 0)$.

Puisque $\mathscr{H}(0, 0)$ est vraie, les lemmes 1 et 2 impliquent que $\mathscr{H}^t(i, k)$ est vraie pour tout $i, k \geqslant 0$. On démontrera enfin le

LEMME 3. $\mathscr{H}^t(i, k)$ pour tout i, k, entraîne $\mathscr{H}(i, k)$ lorsque $i > k$, ce qui achèvera la démonstration de (2.2).

Démonstration du lemme 1. Soit (M, N) une paire de π-module comme dans l'énoncé $\mathscr{H}^t(i, k+1)$. Considérons une suite exacte de π-modules à gauche $0 \to N \to I \to Q \to 0$ avec I un π-module injectif. Comme M est sans $\mathbf{Z}$-torsion, la suite $0 \to M \otimes N \to M \otimes I \to M \otimes Q \to 0$ est aussi exacte et le diagramme de la propriété II se réduit à un diagramme commutatif carré:

$$\begin{tikzcd}
H_i(X; M) \times H^k(X; Q) \arrow[r, "\Phi^{ik}(M, Q)"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \delta"'] & H_{i-k}(X; M \otimes Q) \arrow[d, "\partial"] \\
H_i(X; M) \times H^{k+1}(X; N) \arrow[r, "\Phi^{i(k+1)}(M, N)"] & H_{i-k-1}(X; M \otimes N)
\end{tikzcd}$$

Comme I est injectif et $X = K(\pi, 1)$, on a $H^j(X; I) = 0$ pour $j > 0$ et donc $\delta: H^k(X; Q) \to H^{k+1}(X; N)$ est surjectif pour $k \geqslant 0$. On a donc, en utilisant $\mathscr{H}^t_{(i,\, k)}$:

$$\phi^{i(k+1)}(M, N)(z, \alpha) = \phi^{i(k+1)}(M, N)(z, \delta(\beta)) =$$
$$= \partial(\phi^{ik}(M, Q)(z, \beta)) = \partial(z \cap \beta) = z \cap \alpha,$$

ce qui prouve $\mathscr{H}^t(i, k+1)$ lorsque M est sans $\mathbf{Z}$-torsion. Dans le cas où N est un $F\pi$-module, on procède de même: on prend une suite $0 \to N \to I \to Q \to 0$, avec I un $F\pi$-module injectif. Une telle suite étant $\mathbf{Z}$-scindée, la suite $0 \to M \otimes N \to M \otimes I \to M \otimes Q \to 0$ est encore exacte.

Démonstration du Lemme 2. Soit (M, N) une paire de module comme dans l'énoncé de (2.2). Considérons une suite exacte de π-modules à droite $0 \to K \to L \to M \to 0$ avec L un π-module libre. On en déduit une suite exacte $0 \to T \to L \otimes N \to M \otimes N \to 0$ et une surjection $\nu: K \otimes N \twoheadrightarrow T$. Observons que K est sans $\mathbf{Z}$-torsion; on peut donc appliquer l'hypothèse $\mathscr{H}^t_{(i,\, 0)}$ à la paire (K, N). Ceci, combiné avec la propriété III permet le calcul suivant:

$$\partial(\phi^{(i+1)0}(M, N)(z, \alpha)) = (-1)^0 \nu_*(\phi^{i0}(K, N)(\partial z, \alpha)) = \nu_*(\partial z \cap \alpha) =$$
$$= \partial(z \cap \alpha).$$

Pour prouver $\mathscr{H}^t(i+1, 0)$, il suffit donc d'établir que

$$\partial : H_{i+1}(X; M \otimes N) \to \to H_i(X; T)$$

est injectif pour $i \geqslant 0$. On a la suite exacte:

$$H_{i+1}(X; L \otimes N) \to H_{i+1}(X; M \otimes N) \xrightarrow{\delta} H_i(X; T),$$

d'où l'injectivité de ∂ est conséquence du lemme suivant:

(2.3) LEMME. *Soit* $X = K(\pi, 1)$, N *un* π*-module à gauche et* L *un* π*-module libre. Alors* $H_j(X; L \otimes N) = 0$ *pour* $j > 0$.

Démonstration. Grâce à l'isomorphisme

$$H^j(X; (L_1 \oplus L_2) \otimes N) = H_j(X; L_1 \otimes N) \oplus H_j(X; L_2 \otimes N),$$

il suffit de démontrer (2.3) pour $L = \mathbf{Z}\pi$. Rappelons que

$$P \otimes_\pi Q = H_0(X; P \otimes Q)$$

(voir [Br, p. 55]). On a alors:

$$\begin{aligned}(\mathbf{Z}\pi \otimes N) \otimes_\pi C_j(\tilde{X}) &= H_0(X; (\mathbf{Z}\pi \otimes N) \otimes C_j(\tilde{X})) = \\ &= H_0(X; \mathbf{Z}\pi \otimes (N \otimes C_j(\tilde{X}))) = \mathbf{Z}\pi \otimes_\pi (N \otimes C_j(\tilde{X})) = \\ &= N \otimes C_j(\tilde{X}).\end{aligned}$$

On en déduit que $H_j(X; \mathbf{Z}\pi \otimes N) = H_j(\tilde{X}; N) = 0$, la dernière égalité étant due au fait que $\tilde{X}$ est contractile.

Démonstration du lemme 3. Il suffit de démontrer que $\mathscr{H}^t(i, k)$ implique $\mathscr{H}(i+1, k)$ pour $i \geqslant k$. Soient M un π-module à droite et N un π-module à gauche. Choisissons une suite exacte $0 \to K \to L \to M \to 0$ avec L un $\mathbf{Z}\pi$-module libre. Comme K est sans $\mathbf{Z}$-torsion, l'hypothèse $\mathscr{H}^t(i, k)$ et le même raisonnement que pour la démonstration du lemme 2 montrent que $\phi^{(i+1)k}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$.

3. REMARQUES, APPLICATIONS

1) La preuve du théorème (2.1) utilise abondamment le fait que l'on a affaire à l'homologie et à la cohomologie à coefficients locaux. Notre méthode ne donne donc pas de caractérisation du cap-produit pour l'homo-

logie et la cohomologie à coefficients constants. De même, et curieusement, elle ne semble pas permettre de montrer que des propriétés analogues à I-IV puissent caractériser le cup-produit. Observons qu'une telle caractérisation du cup-produit existe pour la cohomologie des groupes finis (voir [Ws, § 4.2]).

2) Nous ignorons si les propriétés I à IV impliquent que

$\phi_X^{nn}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$ sans les hypothèses restrictives sur M ou $N (n > 0)$. Observons que le cap-produit

$$H^n(X; M) \times H_n(X; N) \to H_0(X; M \otimes N)$$

est induite par l'application « évaluation »:

$$(M \otimes_\pi C_n(\tilde{X})) \times \mathrm{Hom}_\pi(C_n(\tilde{X}); N) \to M \otimes_\pi N$$
$$(m \otimes_\pi z, \alpha) \to m \otimes_\pi \alpha(z).$$

3) Supposons que la famille d'applications $\phi_X^{ik}(M, N)$ soit induite par une famille d'applications:

$$\varphi_X^{ik}(M, N): (M \otimes_\pi C_i(\tilde{X})) \times \mathrm{Hom}_\pi(C_k(\tilde{X}); N) \to (M \otimes N) \otimes_\pi C_{i-k}(\tilde{X})$$

telle que

$$\partial\varphi^{ik}(z, \alpha) = (-1)^k \varphi^{i-1,k}(\partial z, \alpha) + \varphi^{i,k+1}(z, \delta\alpha) \, (\varphi^{ik} = \varphi_X^{ik}(M, N)).$$

Alors, les conditions II et III du théorème (2.1) sont automatiquement vérifiées.

4) Une caractérisation axiomatique du cap-produit telle que celle présentée dans cet article peut être utile pour reconnaître cette opération exprimée dans d'autres théories homologiques (homologie simpliciale, cubique, etc.). Si $\Psi_*: \hat{H}_*(X; M) \xrightarrow{\simeq} H_*(X; M)$ et $\Psi^*: \hat{H}^*(X; N) \xrightarrow{\simeq} H^*(X; N)$ sont des isomorphismes de théories (co-)homologiques et si

$$\hat{\cap}: \hat{H}_i(X; M) \times \hat{H}^k(X; N) \to \hat{H}_{i-k}(X; M \otimes N)$$

est un cap-produit satisfaisant aux propriétés I à IV, alors $\Psi_*(z \hat{\cap} \alpha) = \Psi_*(z) \cap \Psi^*(\alpha)$ (avec les restrictions sur M du théorème (2.1)).

BIBLIOGRAPHIE

[Br] BROWN, K. *Cohomology of groups.* Springer-Verlag, 1982.

[KT] KAN, D. and W. THURSTON. Every connected space has the homology of a $K(\pi, 1)$. *Topology 15* (1976), 253-258.

[Ws] WEISS, E. *Cohomology of groups.* Academic Press, 1969.

(Reçu le 6 décembre 1983)

Jean-Claude Hausmann

Antoine Zahnd

Section de Mathématiques
Université de Genève
Case postale 240
CH-1211 Genève 24

vide-leer-empty