Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DU CAP-PRODUIT À COEFFICIENTS LOCAUX

Kapitel: 2. Le théorème de caractérisation

Autor: Hausmann, Jean-Claude / Zahnd, Antoine

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54557

$$\begin{tikzcd}
H_i(X, M'') \times H^k(X;N) \arrow[rr, "\Phi_X^{ik}(M'', N)"] \arrow[dd, "\partial \times \mathrm{id}"'] & & H_{i-k}(X; M''\otimes N) \arrow[dr, "\partial"] & \\
& & & H_{i-k-1}(X;T) \\
H_{i-1}(X;M') \times H^k(X;N) \arrow[rr, "\Phi_X^{(i-1)k}(M', N)"] & & H_{i-k-1}(X; M'\otimes N) \arrow[ur, "\upsilon_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Pour énoncer la propriété IV on utilise les identifications classiques:

$$H_0(X;M) = M \Big/ \{m\text{-} m\alpha \mid m \in M, \alpha \in \mathbf{Z}\pi\},$$

$$H^0(X;N) = \{n \in N \mid gn = n \quad \text{pour tout} \quad g \in \pi\} \subset N\,.$$

On vérifie que l'application $M \times H^0(X;N) \subset M \times N \to M \otimes N$ donnée par $(m, n) \to m \otimes n$ produit, par passage aux quotients, une application $H_0(X;M) \times H^0(X;N) \to H_0(X; M \otimes N)$ que l'on notera $(m, n) \mapsto m \,\overline{\otimes}\, n$.

Propriété IV: $\phi_X^{00}(M, N)(m, n) = m \,\overline{\otimes}\, n$.

2. Le théorème de caractérisation

(2.1) Théorème. *Soit*

$$\phi_X^{ik}(M, N) \colon H_i(X;M) \times H^k(X;N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

une famille d'applications définies pour tout $i, k \geqslant 0$ *et tout triple* (X, M, N), *où* X *est un CW-complexe connexe par arc,* M *un* $\pi_1(X)$*-module à droite et* N *un* $\pi_1(X)$*-module à gauche. Supposons que la famille* $\phi_X^{ik}(M, N)$ *satisfait aux propriétés I à IV. Alors* $\phi_X^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$, *sauf peut-être lorsque* $i = k > 0$. *Cette dernière restriction est inutile lorsque* M *est sans* $\mathbf{Z}$*-torsion ou que* N *est un* $F\pi_1(X)$*-module pour un corps* F.

Le reste de ce paragraphe est dévolu à la démonstration du théorème (2.1). Un théorème de Kan-Thurston [KT] affirme que, pour tout

CW-complexe connexe par arc X, on peut trouver une application $f^X: TX \to X$ telle que:

a) $f^X_*: H_*(TX; P) \to H_*(X; P)$ est un isomorphisme pour tout $\pi_1(X)$-module P

b) $TX = K(\pi_1(TX), 1)$, i.e. TX est contractile.

Ce résultat permet de réduire la démonstration du théorème (2.1) au cas d'espace d'Eilenberg-McLane. Le cas général découlera du calcul suivant (avec les abréviations $\phi_X^{ik} = \phi_X^{ik}(M, N)$ et $f = f^X$):

$$\phi_X^{ik}(z, \alpha) = \phi_X^{ik}(f_*(y), \alpha) = f_*\phi_{TX}^{ik}(y, f^*(\alpha)) = f_*(y \cap f^*(\alpha)) = z \cap \alpha .$$

La propriété I ne sera plus utilisée, car nous allons démontrer la proposition suivante:

(2.2). PROPOSITION. *Soit* $X = K(\pi, 1)$. *Soit*

$$\phi^{ik}(M, N): H_i(X; M) \times H^k(X; N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

une famille d'applications définies pour tout $i, k \geqslant 0$, *tout* π*-module à droite* M *et tout* π*-module à gauche* N. *Si* $\phi^{ik}(M, N)$ *satisfait aux propriétés II, III et IV, alors* $\phi^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$, *sauf peut-être pour* $i = k > 0$. *Lorsque* M *est sans* **Z***-torsion ou que* N *est un* $F\pi$*-module pour un corps* F, *on a également* $\phi^{ii}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$.

Démonstration. Considérons les énoncés suivants:

$\mathscr{H}(i, k)$: $\phi^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$, pour toute paire (M, N) de π-modules comme dans l'énoncé de (2.2).

$\mathscr{H}^t(i, k)$: $\phi^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$ pour toute paire (M, N) de π-modules comme dans l'énoncé de (2.2), avec M sans **Z**-torsion ou N un $F\pi$-module.

L'hypothèse $\mathscr{H}(0, 0)$ est vraie: elle est équivalente à la propriété IV. On va démontrer tout d'abord les deux lemmes suivants:

LEMME 1. *Pour tout* $i \geqslant k \geqslant 0$ $\mathscr{H}^t(i, k)$ *entraîne* $\mathscr{H}^t(i, k+1)$.

LEMME 2. $\mathscr{H}^t(i, 0)$ *entraîne* $\mathscr{H}^t(i+1, 0)$.

Puisque $\mathscr{H}(0, 0)$ est vraie, les lemmes 1 et 2 impliquent que $\mathscr{H}^t(i, k)$ est vraie pour tout $i, k \geqslant 0$. On démontrera enfin le

LEMME 3. $\mathscr{H}^t(i, k)$ pour tout i, k, entraîne $\mathscr{H}(i, k)$ lorsque $i > k$, ce qui achèvera la démonstration de (2.2).

Démonstration du lemme 1. Soit (M, N) une paire de π-module comme dans l'énoncé $\mathscr{H}^t(i, k+1)$. Considérons une suite exacte de π-modules à gauche $0 \to N \to I \to Q \to 0$ avec I un π-module injectif. Comme M est sans **Z**-torsion, la suite $0 \to M \otimes N \to M \otimes I \to M \otimes Q \to 0$ est aussi exacte et le diagramme de la propriété II se réduit à un diagramme commutatif carré:

$$\begin{tikzcd} H_i(X; M) \times H^k(X; Q) \arrow[r, "\Phi^{ik}(M, Q)"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \delta"'] & H_{i-k}(X; M \otimes Q) \arrow[d, "\partial"] \\ H_i(X; M) \times H^{k+1}(X; N) \arrow[r, "\Phi^{i(k+1)}(M, N)"] & H_{i-k-1}(X; M \otimes N) \end{tikzcd}$$

Comme I est injectif et $X = K(\pi, 1)$, on a $H^j(X; I) = 0$ pour $j > 0$ et donc $\delta: H^k(X; Q) \to H^{k+1}(X; N)$ est surjectif pour $k \geqslant 0$. On a donc, en utilisant $\mathscr{H}^t_{(i, k)}$:

$$\phi^{i(k+1)}(M, N)(z, \alpha) = \phi^{i(k+1)}(M, N)(z, \delta(\beta)) = \\ = \partial(\phi^{ik}(M, Q)(z, \beta)) = \partial(z \cap \beta) = z \cap \alpha,$$

ce qui prouve $\mathscr{H}^t(i, k+1)$ lorsque M est sans **Z**-torsion. Dans le cas où N est un $F\pi$-module, on procède de même: on prend une suite $0 \to N \to I \to Q \to 0$, avec I un $F\pi$-module injectif. Une telle suite étant **Z**-scindée, la suite $0 \to M \otimes N \to M \otimes I \to M \otimes Q \to 0$ est encore exacte.

Démonstration du Lemme 2. Soit (M, N) une paire de module comme dans l'énoncé de (2.2). Considérons une suite exacte de π-modules à droite $0 \to K \to L \to M \to 0$ avec L un π-module libre. On en déduit une suite exacte $0 \to T \to L \otimes N \to M \otimes N \to 0$ et une surjection $\nu: K \otimes N \twoheadrightarrow T$. Observons que K est sans **Z**-torsion; on peut donc appliquer l'hypothèse $\mathscr{H}^t_{(i, 0)}$ à la paire (K, N). Ceci, combiné avec la propriété III permet le calcul suivant:

$$\partial(\phi^{(i+1)0}(M, N)(z, \alpha)) = (-1)^0 \nu_*(\phi^{i0}(K, N)(\partial z, \alpha)) = \nu_*(\partial z \cap \alpha) = \\ = \partial(z \cap \alpha).$$

Pour prouver $\mathscr{H}^t(i+1, 0)$, il suffit donc d'établir que

$$\partial : H_{i+1}(X ; M \otimes N) \to\to H_i(X ; T)$$

est injectif pour $i \geqslant 0$. On a la suite exacte:

$$H_{i+1}(X ; L \otimes N) \to H_{i+1}(X ; M \otimes N) \xrightarrow{\delta} H_i(X ; T),$$

d'où l'injectivité de ∂ est conséquence du lemme suivant:

(2.3) LEMME. *Soit* $X = K(\pi, 1)$, N *un* π*-module à gauche et* L *un* π*-module libre. Alors* $H_j(X ; L \otimes N) = 0$ *pour* $j > 0$.

Démonstration. Grâce à l'isomorphisme

$$H^j(X ; (L_1 \oplus L_2) \otimes N) = H_j(X ; L_1 \otimes N) \oplus H_j(X ; L_2 \otimes N),$$

il suffit de démontrer (2.3) pour $L = \mathbf{Z}\pi$. Rappelons que

$$P \otimes_\pi Q = H_0(X ; P \otimes Q)$$

(voir [Br, p. 55]). On a alors:

$$\begin{aligned}(\mathbf{Z}\pi \otimes N) \otimes_\pi C_j(\tilde{X}) &= H_0(X ; (\mathbf{Z}\pi \otimes N) \otimes C_j(\tilde{X})) = \\ &= H_0(X ; \mathbf{Z}\pi \otimes (N \otimes C_j(\tilde{X}))) = \mathbf{Z}\pi \otimes_\pi (N \otimes C_j(\tilde{X})) = \\ &= N \otimes C_j(\tilde{X}).\end{aligned}$$

On en déduit que $H_j(X ; \mathbf{Z}\pi \otimes N) = H_j(\tilde{X} ; N) = 0$, la dernière égalité étant due au fait que $\tilde{X}$ est contractile.

Démonstration du lemme 3. Il suffit de démontrer que $\mathscr{H}^t(i, k)$ implique $\mathscr{H}(i+1, k)$ pour $i \geqslant k$. Soient M un π-module à droite et N un π-module à gauche. Choisissons une suite exacte $0 \to K \to L \to M \to 0$ avec L un $\mathbf{Z}\pi$-module libre. Comme K est sans $\mathbf{Z}$-torsion, l'hypothèse $\mathscr{H}^t(i, k)$ et le même raisonnement que pour la démonstration du lemme 2 montrent que $\phi^{(i+1)k}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$.

3. REMARQUES, APPLICATIONS

1) La preuve du théorème (2.1) utilise abondamment le fait que l'on a affaire à l'homologie et à la cohomologie à coefficients locaux. Notre méthode ne donne donc pas de caractérisation du cap-produit pour l'homo-