

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1985)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DE THÉODORE DES CORPS QUADRATIQUES RÉELS
Autor: Kahane, Jean-Pierre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-54559>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 22.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LA THÉORIE DE THÉODORE DES CORPS QUADRATIQUES RÉELS

par Jean-Pierre KAHANE

Théodore a développé des preuves géométriques pour l'irrationalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... jusqu'à $\sqrt{17}$ ¹⁾. A titre d'exemple, voici de telles preuves géométriques pour $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

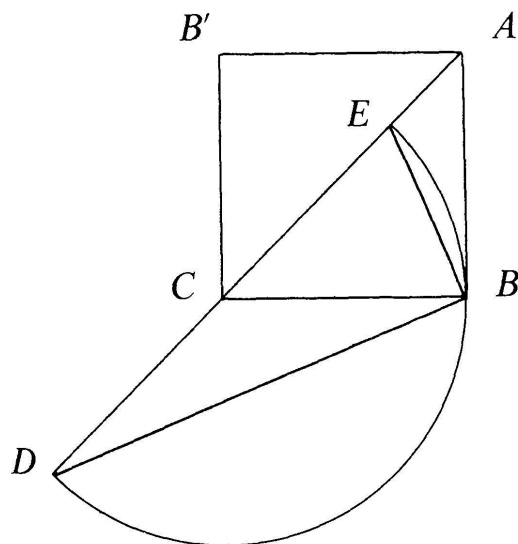


FIGURE 1

Sur la figure 1, $ABCB'$ est un carré, et $CD = CE = CB = AB$. Ainsi $AD = 2AB + AE$. Les triangles ABE et ADB sont semblables, donc $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE}$. Donc l'algorithme des divisions successives, appliqué à AD et AB , ne se termine pas. Donc $1 + \sqrt{2}$ est irrationnel.

Sur la figure 2, ABB' est un triangle équilatéral, G est le milieu de BB' , et

¹⁾ Platon, Théétète, 147 d.

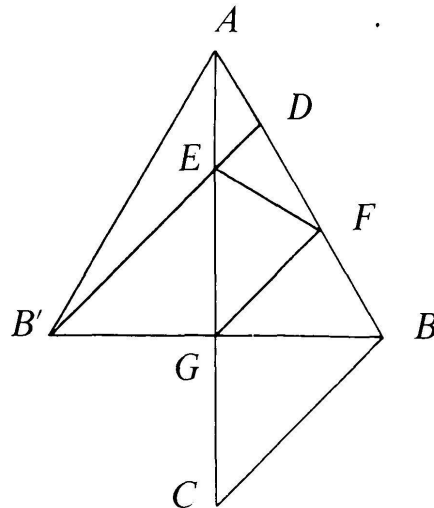


FIGURE 2

$$GE = GC = GB$$

$$CB \parallel GF \parallel B'ED.$$

Par symétrie par rapport à GF , $EF = BF$.

Par projection parallèle de $B'GB$, $DF = FB$.

$\widehat{EFA} = \widehat{EBF}$ parce que le triangle EFB est isocèle, donc

$$\widehat{EFA} = \frac{\pi}{6} = \widehat{EAF},$$

donc le triangle AEF est isocèle, donc $EF = AE$. Donc

$$AC = EC + AE = AB + AE$$

$$AB = 2AE + AD$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB} \quad \text{par homothétie.}$$

Donc l'algorithme des divisions successives, appliqué à AC et AB , ne se termine pas. Donc $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ est irrationnel.

La première preuve s'exprime ainsi, en posant $x = 1 + \sqrt{2} = \frac{AD}{AB}$:

$$x = 2 + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}} = (2, 2, \dots)$$

où la parenthèse contient la suite des quotients incomplets de la décomposition de x en fraction continue. La seconde preuve, avec $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{AB}$, nécessite deux étapes :

$$x = 1 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = 2 + \frac{1}{x}$$

soit
$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}} = (1, 2, 1, 2, \dots).$$

Soit maintenant n un entier quadratefrei. Une preuve à la Théodore que \sqrt{n} est irrationnel nécessite 1) le choix d'un nombre $x \in Q(\sqrt{n})$, corps de \sqrt{n} , 2) le développement de x en fraction continue, 3) une preuve géométrique que ce développement est périodique. Désignons par $Q_p(\sqrt{n})$ l'ensemble des $x \in Q(\sqrt{n})$, $x > 1$, dont le développement est purement périodique (sans partie aperiodique), c'est-à-dire dont le conjugué est compris entre -1 et 0 . On se limite à $x \in Q_p(\sqrt{n})$. Ainsi

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} x = x_0 = a_1 + \frac{1}{x_1} & (a_1 = E(x_0)) \\ x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2} & (a_2 = E(x_1)) \\ \vdots & \\ x_{k-1} = a_k + \frac{1}{x_k} & (a_k = E(x_{k-1})) \\ x_k = x_0 = x & x_j \neq x \quad \text{si } j < k \\ x = (a_1, a_2, \dots, a_k; a_1, a_2, \dots, a_k; \dots). \end{array} \right.$$

La preuve géométrique consiste à construire une figure où apparaissent des segments S_0, S_1, \dots, S_k tels que $S_0 = xS_1$,

$$\begin{aligned} S_0 &= a_1 S_1 + S_2 \\ S_1 &= a_2 S_2 + S_3 \\ &\vdots \\ S_{k-1} &= a_k S_k + S_{k+1} \end{aligned}$$

et à montrer que
$$\frac{S_k}{S_{k+1}} = \frac{S_0}{S_1}.$$

Cette dernière égalité résulte de la similitude de deux triangles, dont le rapport de similitude est

$$\rho = \rho(x) = \frac{S_0}{S_k}.$$

Nous appellerons $\rho(x)$ la *raison* de x . La complexité de la preuve dépend de k (le nombre d'étapes, que nous appellerons la *hauteur* de x), et sa faisabilité dépend de ρ ; il est clair que pour $\rho > 50$ la figure souhaitée ne peut pas être tracée.

Dans son aspect algébrique, la théorie de Théodore consiste en ceci.

1) Etant donné n , déterminer le minimum de $\rho(x)$ quand $x \in Q_p(\sqrt{n})$, qu'on appellera la raison du corps $Q(\sqrt{n})$ et qu'on désignera par $r(n)$. 2) Parmi les $x \in Q_p(\sqrt{n})$ tels que $\rho(x) = r(n)$, déterminer x de hauteur minimum.

Etant donné $x \in Q_p(\sqrt{n})$, on a

$$\rho(x) = \frac{S_0}{S_1} \frac{S_1}{S_2} \dots \frac{S_{k-1}}{S_k} = x_0 x_1 \dots x_{k-1}.$$

Désormais, la suite des quotients complets $x_0 = x, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = x_0$, les quotients incomplets a_1, \dots, a_k et la hauteur k sont définis par les formules (1), et la raison de x par la formule

$$(2) \quad \rho(x) = x_0 x_1 \dots x_{k-1} = x_1 x_2 \dots x_k.$$

Les formules (1) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_0 x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_0 x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ \begin{pmatrix} x_0 x_1 \dots x_k \\ x_1 \dots x_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\rho \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $\rho = \rho(x)$. Donc

$$(3) \quad \rho = Qx + Q'$$

et ρ est la valeur propre supérieure à 1 de la matrice unimodulaire $\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}$. Soit N la trace, et $\varepsilon = \pm 1$ le déterminant de cette matrice. On a

$$(4) \quad \rho^2 - N\rho + \varepsilon = 0 \quad (N = P + Q', \quad \varepsilon = PQ' - P'Q)$$

$$\rho = \frac{N + \sqrt{N^2 - 4\varepsilon}}{2}$$

$$x = \frac{N - 2Q' + \sqrt{N^2 - 4\varepsilon}}{2Q}.$$

Si $\varepsilon = -1$ la formule (4) s'écrit

$$\rho = N + \frac{1}{\rho} = (N, N, \dots).$$

Ainsi $\rho \in Q_p(\sqrt{n})$, et ρ a pour hauteur 1 et pour raison ρ . Parmi les nombres $y \in Q_p(\sqrt{n})$ tels que $\rho(y) = \rho$, le meilleur choix possible (le nombre de hauteur minimum) est $y = \rho$.

Si $\varepsilon = +1$ la formule (4) donne

$$\rho = N - 1 + \frac{\rho - 1}{\rho} = N - 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho - 1}}$$

donc

$$\rho - 1 = (N - 2, 1; N - 2, 1, \dots).$$

Ainsi $\rho - 1 \in Q_p(\sqrt{n})$, et $\rho - 1$ a pour hauteur 2 et pour raison ρ . $\rho = (\rho - 1) \frac{\rho}{\rho - 1}$. Parmi les nombres $y \in Q_p(\sqrt{n})$ tels que $\rho(y) = \rho$, les meilleurs choix possibles (hauteur minimum) comprennent $y = \rho - 1$. De façon générale, ces meilleurs choix sont de la forme

$$y = (a, b; a, b; \dots)$$

avec

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}$$

où $P + Q' = N$, c'est-à-dire

$$ab + 2 = N$$

et alors, d'après (3),

$$y = \frac{\rho - 1}{b}.$$

Donc le nombre des meilleurs choix est le nombre de diviseurs de $N - 2$, et le plus grand des meilleurs choix est $\rho - 1$.

Dans les deux cas on a

$$N^2 - 4\varepsilon = k^2n.$$

Le plus petit choix de ρ correspond au plus petit choix de N , c'est-à-dire à la solution minimale de l'équation en (N, k)

$$(F) \quad N^2 - k^2n = 4\varepsilon.$$

Quand N est pair, l'équation (F) s'appelle équation de Fermat, ou de Fermat-Pell.

Résumons. Si $Q_p(\sqrt{n})$ contient un nombre de hauteur impaire, il contient aussi un nombre ρ de hauteur un (à savoir la raison du précédent). L'équation (F) avec $\varepsilon = -1$ admet une solution

$$N = \rho - \frac{1}{\rho}.$$

La plus petite solution de (F) donne le minimum de ρ , c'est-à-dire la raison $r(n)$ du corps $Q_p(\sqrt{n})$. Il existe un x unique de hauteur minimum tel que $\rho(x) = r(n)$, à savoir $x = r(n)$.

Si $Q_p(\sqrt{n})$ contient seulement des nombres de hauteur paire, il contient des nombres ρ de hauteur deux (à savoir les raisons des précédents). L'équation (F) avec $\varepsilon = 1$ admet des solutions

$$N = \rho + \frac{1}{\rho}.$$

TABEAU I

n	2	3	5	6	7	10	11	13	14	15	17	19
ε	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1
$\min N$	2	4	1	10	16	6	20	3	30	8	8	340
$r(n)$	$1 + \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{3}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$5 + 2\sqrt{6}$	$8 + 3\sqrt{7}$	$3 + \sqrt{10}$	$10 + 3\sqrt{11}$	$\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$	$15 + 4\sqrt{14}$	$4 + \sqrt{15}$	$4 + \sqrt{17}$	$170 + 39\sqrt{19}$
	2,414	3,732	1,618	9,899	15,937	6,162	19,950	3,303	29,967	7,873	8,123	339,997

La plus petite solution de (F) donne le minimum de ρ , c'est-à-dire $r(n)$. Les nombres $x \in Q_p(\sqrt{n})$ de hauteur minimum tels que $\rho(x) = r(n)$ sont les quotients de $\rho - 1$ par les diviseurs de $N - 2$.

Dans les deux cas, les raisons $\rho(x)$ ($x \in Q_p(\sqrt{n})$) sont les unités du corps $Q(\sqrt{n})$. La théorie de Théodore est une façon simple d'obtenir leur existence et certaines de leurs propriétés, et aussi de démontrer l'existence de solutions de (F) quand $\varepsilon = 1$ (observer que si $\varepsilon = -1$ la hauteur de $r^2(n)$ est 2).

Le tableau 1 donne les valeurs de ε et de $r(n)$ pour les entiers quadratfrei n , compris entre 2 et 19. Il explique pourquoi Théodore s'était arrêté à $\sqrt{17}$. La figure 3 explicite une construction géométrique dans le cas $n = 7$, et montre comment on peut opérer en *une* étape, dans le cas $\varepsilon = 1$, en utilisant une variante de l'algorithme des divisions successives. Même avec cette simplification, la figure dans le cas $n = 14$ est peu lisible, et dans le cas $n = 19$ elle est impossible à tracer.

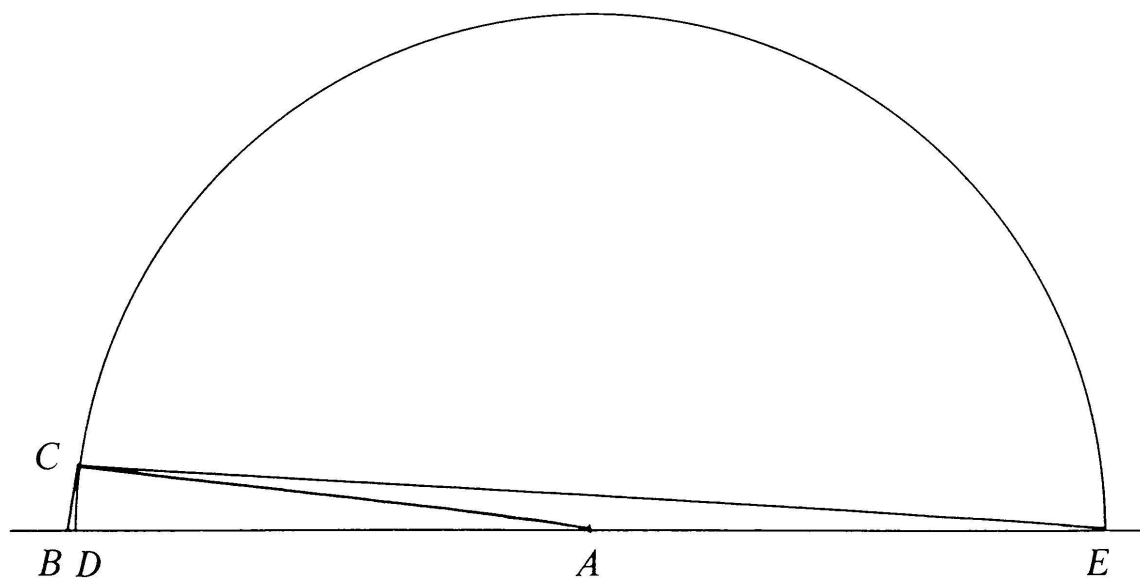


FIGURE 3

$$AB = 8BC, \quad \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}, \quad AD = AE = AC = 3\sqrt{7} BC$$

$$BE = (8 + 3\sqrt{7}) BC = 16 BC - BD, \quad \frac{BC}{BD} = \frac{BE}{BC}$$