

# Plongement d'un corps de nombres dans une algèbre de matrices rationnelles

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On termine ce travail en montrant comment on peut retrouver la formule classique de Hecke à partir de la formule adélique. Pour cela, on construit une projection du quotient  $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$  dans le quotient  $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$  en utilisant la décomposition bien connue du groupe  $G(\mathbf{A})$ :

$$G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q}) \cdot G^+(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}}).$$

Pour obtenir la formule classique, on calcule quelle est l'image par cette projection du domaine d'intégration  $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$  qui apparaît dans la formule généralisée. En particulier, cela fait intervenir des résultats obtenus dans le chapitre II.

Cet article reproduit une thèse de 3<sup>e</sup> cycle effectuée sous la direction de Gilles Lachaud. Qu'il trouve ici exprimée ma reconnaissance pour l'aide qu'il m'a apportée.

### Chapitre I

#### PLONGEMENT D'UN CORPS DE NOMBRES DANS UNE ALGÈBRE DE MATRICES RATIONNELLES

Dans ce qui suit,  $k$  désigne un corps global ( $\mathbf{A}$ -field dans la terminologie de [6] p. 43) et  $E$  une algèbre étale sur  $k$  ([3] chap. V, p. 28, déf. 1).

*Exemple.* On prend pour  $k$  le corps  $\mathbf{Q}$  des nombres rationnels et pour  $E$  une extension de dimension finie de  $\mathbf{Q}$ ; alors  $E$  est une extension séparable de  $\mathbf{Q}$  et donc une algèbre étale ([3] chap. V, p. 35, déf. 1).

On note  $E_{\text{vect}}$  l'espace vectoriel sous-jacent à  $E$ ; et on pose:

$$n = \dim E_{\text{vect}} = [E:k].$$

Si  $x \in E$ , on note  $u_x$  l'endomorphisme  $k$ -linéaire de  $E_{\text{vect}}$  défini par

$$u_x(y) = xy \quad (y \in E),$$

de telle sorte que

$$u_{x+y} = u_x + u_y \quad u_{xy} = u_x \circ u_y, \quad x, y \in E;$$

autrement dit, l'application  $u: E \rightarrow \text{End}(E_{\text{vect}})$  définie par  $u: x \mapsto u_x$  est un homomorphisme de  $k$ -algèbres.

Soit  $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_n]$  une base du  $k$ -espace vectoriel  $E_{\text{vect}}$ . Cette base définit un isomorphisme  $\Omega$  de  $k^n$  sur  $E$  défini par

$$\Omega(x_1, \dots, x_n) = x_1\omega_1 + \dots + x_n\omega_n.$$

On pose, pour  $x \in E$ ,

$$\pi(x) = \Omega^{-1}u_x\Omega,$$

de telle sorte que

$$\pi: E \rightarrow M_n(k)$$

est un homomorphisme de  $k$ -algèbres. On pose

$$\pi(E) = B(k);$$

ainsi  $B(k)$  est une sous-algèbre commutative et unifère de  $M_n(k)$ , de dimension  $n$  sur  $k$ . Comme sous-espace vectoriel de dimension  $n$  de  $M_n(k)$ , l'algèbre  $B(k)$  est définie par  $N = n(n-1)$  équations linéaires à coefficients dans  $k$ :

$$f_1(x) = 0, \dots, f_N(x) = 0;$$

on notera  $F$  l'application linéaire de  $M_n(k)$  dans  $k^N$  de coordonnées  $f_1, \dots, f_N$  de sorte que  $B(k)$  est égal au noyau de  $F$ .

Pour toute extension  $K$  de  $k$ , on pose

$$B(K) = \{x \in M_n(K) \mid F(x) = 0\};$$

c'est une sous-algèbre de  $M_n(K)$  qui admet  $\pi(\omega) = [\pi(\omega_1), \dots, \pi(\omega_n)]$  pour base. Pour  $x \otimes \lambda \in E \otimes_k K$ , on pose:

$$\pi(x \otimes \lambda) = \lambda\pi(x);$$

l'application  $\pi$  ainsi prolongée est  $K$ -linéaire et définit un isomorphisme de  $K$ -algèbres:

$$\pi: E \otimes_k K \rightarrow B(K)$$

(en effet, ici encore,  $\pi$  transforme une base de  $E \otimes K$  en une base de  $B(K)$ ). On pose

$$T(K) = B(K) \cap GL_n(K),$$

le groupe  $T(K)$  est donc le groupe des éléments inversibles de  $B(K)$ ; en effet si  $x \in B(K)^*$  alors  $x \in GL_n(K)$ .

Réciproquement, si  $x \in B(K)$  a un déterminant non nul, l'application  $y \mapsto xy$  de  $B(K)$  est  $K$ -linéaire et injective (puisque  $x$  a un inverse dans

$GL_n(K)$ ), donc surjective, et il existe donc  $y \in B(K)$  tel que  $xy = 1$ . La définition de  $T(K)$  montre que  $T$  est un sous-groupe algébrique commutatif de  $GL_n$ .

Prenons en particulier pour  $K$  une extension algébriquement close  $\bar{k}$  de  $k$ ; l'algèbre  $B(\bar{k})$  est diagonalisable (cf. [3] chap. V, p. 29, Prop. 2); elle est donc isomorphe sur  $\bar{k}$  à l'algèbre produit  $\bar{k}^n$ , par conséquent, le groupe  $T(\bar{k})$  est isomorphe à  $(\bar{k}^*)^n$  ce qui démontre la

**PROPOSITION 1.** *Le groupe  $T$  est un tore maximal de  $GL(n)$  défini sur  $k$  (et donc un sous-groupe de Cartan) (cf. [1], § 8.5, p. 205 et 316).*

*Remarque.* Dans le cas où  $E$  est un corps de nombres sur  $\mathbf{Q}$ , l'homomorphisme  $\pi$  donne bien un plongement de  $E$  dans une algèbre  $B(\mathbf{Q})$  de matrices rationnelles.

## Chapitre II

### CLASSES D'IDÉAUX ET EXTENSIONS ALGÈBRIQUES

On suppose maintenant que  $k$  est un corps de nombres sur  $\mathbf{Q}$  et que  $E$  est une extension de  $k$ .

Si  $v$  (resp.  $w$ ) est une place de  $k$  (resp. de  $E$ ), on note  $k_v$  (resp.  $E_w$ ) le complété de  $k$  (resp. de  $E$ ) en cette place et on pose :

$$F_v = \prod_{w|v} E_w.$$

On note  $\mu_w$  l'application

$$\sum \lambda_i \otimes \omega_i \rightarrow \sum \lambda_i \omega_i$$

de  $E \otimes k_v$  dans  $E_w$  (elle n'est pas injective), et si les places de  $E$  au-dessus de la place  $v$  de  $k$  sont les places  $w_1, \dots, w_s$ , on note

$$\mu: E \otimes k_v \rightarrow F_v$$

l'application telle que

$$\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_s(x)).$$

C'est un isomorphisme de  $k_v$ -algèbres (cf. [6], Th. 4, p. 56).