Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SÉRIES D'EISENSTEIN, INTÉGRALES TOROÏDALES ET UNE FORMULE DE HECKE

Autor: Wielonsky, Franck

Kapitel: Plongement d'un corps de nombres dans une algèbre de matrices rationnelles

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54560

On termine ce travail en montrant comment on peut retrouver la formule classique de Hecke à partir de la formule adélique. Pour cela, on construit une projection du quotient $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ dans le quotient $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$ en utilisant la décomposition bien connue du groupe $G(\mathbf{A})$:

$$G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q}) \cdot G^{+}(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}}) .$$

Pour obtenir la formule classique, on calcule quelle est l'image par cette projection du domaine d'intégration $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$ qui apparaît dans la formule généralisée. En particulier, cela fait intervenir des résultats obtenus dans le chapitre II.

Cet article reproduit une thèse de 3e cycle effectuée sous la direction de Gilles Lachaud. Qu'il trouve ici exprimée ma reconnaissance pour l'aide qu'il m'a apportée.

Chapitre I

Plongement d'un corps de nombres dans une algèbre de matrices rationnelles

Dans ce qui suit, k désigne un corps global ($\mathbf{A}$-field dans la terminologie de [6] p. 43) et E une algèbre étale sur k ([3] chap. V, p. 28, déf. 1).

Exemple. On prend pour k le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels et pour E une extension de dimension finie de $\mathbf{Q}$; alors E est une extension séparable de $\mathbf{Q}$ et donc une algèbre étale ([3] chap. V, p. 35, déf. 1).

On note E_{vect} l'espace vectoriel sous-jacent à E; et on pose:

$$n = \dim E_{\text{vect}} = [E : k] .$$

Si $x \in E$, on note u_x l'endomorphisme k-linéaire de E_{vect} défini par

$$u_x(y) = xy \qquad (y \in E) ,$$

de telle sorte que

$$u_{x+y} = u_x + u_y \qquad u_{xy} = u_x \circ u_y , \qquad x, y \in E ;$$

autrement dit, l'application $u : E \to End(E_{\text{vect}})$ définie par $u : x \mapsto u_x$ est un homomorphisme de k-algèbres.

Soit $\omega = [\omega_1, ..., \omega_n]$ une base du k-espace vectoriel E_{vect}. Cette base définit un isomorphisme Ω de k^n sur E défini par

$$\Omega(x_1, ..., x_n) = x_1\omega_1 + ... + x_n\omega_n .$$

On pose, pour $x \in E$,

$$\pi(x) = \Omega^{-1}u_x\Omega ,$$

de telle sorte que

$$\pi: E \to M_n(k)$$

est un homomorphisme de k-algèbres. On pose

$$\pi(E) = B(k) ;$$

ainsi $B(k)$ est une sous-algèbre commutative et unifère de $M_n(k)$, de dimension n sur k. Comme sous-espace vectoriel de dimension n de $M_n(k)$, l'algèbre $B(k)$ est définie par $N = n(n-1)$ équations linéaires à coefficients dans k:

$$f_1(x) = 0, ..., f_N(x) = 0 ;$$

on notera F l'application linéaire de $M_n(k)$ dans k^N de coordonnées $f_1, ..., f_N$ de sorte que $B(k)$ est égal au noyau de F.

Pour toute extension K de k, on pose

$$B(K) = \{x \in M_n(K) \mid F(x) = 0\} ;$$

c'est une sous-algèbre de $M_n(K)$ qui admet $\pi(\omega) = [\pi(\omega_1), ..., \pi(\omega_n)]$ pour base. Pour $x \otimes \lambda \in E \otimes_k K$, on pose:

$$\pi(x \otimes \lambda) = \lambda\pi(x);$$

l'application π ainsi prolongée est K-linéaire et définit un isomorphisme de K-algèbres:

$$\pi: E \otimes_k K \to B(K)$$

(en effet, ici encore, π transforme une base de $E \otimes K$ en une base de $B(K)$). On pose

$$T(K) = B(K) \cap GL_n(K) ,$$

le groupe $T(K)$ est donc le groupe des éléments inversibles de $B(K)$; en effet si $x \in B(K)^*$ alors $x \in GL_n(K)$.

Réciproquement, si $x \in B(K)$ a un déterminant non nul, l'application $y \mapsto xy$ de $B(K)$ est K-linéaire et injective (puisque x a un inverse dans

$GL_n(K)$), donc surjective, et il existe donc $y \in B(K)$ tel que $xy = 1$. La définition de $T(K)$ montre que T est un sous-groupe algébrique commutatif de GL_n.

Prenons en particulier pour K une extension algébriquement close $\bar{k}$ de k; l'algèbre $B(\bar{k})$ est diagonalisable (cf. [3] chap. V, p. 29, Prop. 2); elle est donc isomorphe sur $\bar{k}$ à l'algèbre produit $\bar{k}^n$, par conséquent, le groupe $T(\bar{k})$ est isomorphe à $(\bar{k}*)^n$ ce qui démontre la

PROPOSITION 1. *Le groupe* T *est un tore maximal de* $GL(n)$ *défini sur* k *(et donc un sous-groupe de Cartan)* (cf. [1], § 8.5, p. 205 et 316).

Remarque. Dans le cas où E est un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$, l'homomorphisme π donne bien un plongement de E dans une algèbre $B(\mathbf{Q})$ de matrices rationnelles.

Chapitre II

CLASSES D'IDÉAUX ET EXTENSIONS ALGÉBRIQUES

On suppose maintenant que k est un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$ et que E est une extension de k.

Si v (resp. w) est une place de k (resp. de E), on note k_v (resp. E_w) le complété de k (resp. de E) en cette place et on pose:

$$F_v = \prod_{w|v} E_w .$$

On note μ_w l'application

$$\Sigma\lambda_i \otimes \omega_i \to \Sigma\lambda_i\omega_i$$

de $E \otimes k_v$ dans E_w (elle n'est pas injective), et si les places de E au-dessus de la place v de k sont les places $w_1, ..., w_s$, on note

$$\mu : E \otimes k_v \to F_v$$

l'application telle que

$$\mu(x) = (\mu_1(x), ..., \mu_s(x)) .$$

C'est un isomorphisme de k_v-algèbres (cf. [6], Th. 4, p. 56).