Plongement d'un corps de nombres dans une algèbre de matrices rationnelles

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

On termine ce travail en montrant comment on peut retrouver la formule classique de Hecke à partir de la formule adélique. Pour cela, on construit une projection du quotient $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ dans le quotient $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$ en utilisant la décomposition bien connue du groupe $G(\mathbf{A})$:

$$G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q})\cdot G^{+}(\mathbf{R})\cdot G(\hat{\mathbf{Z}}).$$

Pour obtenir la formule classique, on calcule quelle est l'image par cette projection du domaine d'intégration $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$ qui apparaît dans la formule généralisée. En particulier, cela fait intervenir des résultats obtenus dans le chapitre II.

Cet article reproduit une thèse de 3^{e} cycle effectuée sous la direction de Gilles Lachaud. Qu'il trouve ici exprimée ma reconnaissance pour l'aide qu'il m'a apportée.

Chapitre I

Plongement d'un corps de nombres dans une algèbre de matrices rationnelles

Dans ce qui suit, k désigne un corps global ($\mathbf{A}$-field dans la terminologie de [6] p. 43) et E une algèbre étale sur k ([3] chap. V, p. 28, déf. 1).

Exemple. On prend pour k le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels et pour E une extension de dimension finie de $\mathbf{Q}$; alors E est une extension séparable de $\mathbf{Q}$ et donc une algèbre étale ([3] chap. V, p. 35, déf. 1).

On note E_{vect} l'espace vectoriel sous-jacent à E; et on pose:

$$n = \dim E_{\text{vect}} = [E:k].$$

Si $x \in E$, on note u_x l'endomorphisme k-linéaire de E_{vect} défini par

$$u_x(y) = xy \qquad (y \in E),$$

de telle sorte que

$$u_{x+y} = u_x + u_y \qquad u_{xy} = u_x \circ u_y, \qquad x, y \in E;$$

autrement dit, l'application $u: E \to End(E_{\text{vect}})$ définie par $u: x \mapsto u_x$ est un homomorphisme de k-algèbres.

Soit $\omega = [\omega_1, ..., \omega_n]$ une base du k-espace vectoriel E_{vect}. Cette base définit un isomorphisme Ω de k^n sur E défini par

$$\Omega(x_1, ..., x_n) = x_1\omega_1 + ... + x_n\omega_n .$$

On pose, pour $x \in E$,

$$\pi(x) = \Omega^{-1}u_x\Omega ,$$

de telle sorte que

$$\pi : E \to M_n(k)$$

est un homomorphisme de k-algèbres. On pose

$$\pi(E) = B(k) ;$$

ainsi $B(k)$ est une sous-algèbre commutative et unifère de $M_n(k)$, de dimension n sur k. Comme sous-espace vectoriel de dimension n de $M_n(k)$, l'algèbre $B(k)$ est définie par $N = n(n-1)$ équations linéaires à coefficients dans k:

$$f_1(x) = 0, ..., f_N(x) = 0 ;$$

on notera F l'application linéaire de $M_n(k)$ dans k^N de coordonnées $f_1, ..., f_N$ de sorte que $B(k)$ est égal au noyau de F.

Pour toute extension K de k, on pose

$$B(K) = \{x \in M_n(K) \mid F(x) = 0\} ;$$

c'est une sous-algèbre de $M_n(K)$ qui admet $\pi(\omega) = [\pi(\omega_1), ..., \pi(\omega_n)]$ pour base. Pour $x \otimes \lambda \in E \otimes_k K$, on pose:

$$\pi(x \otimes \lambda) = \lambda\pi(x);$$

l'application π ainsi prolongée est K-linéaire et définit un isomorphisme de K-algèbres:

$$\pi : E \otimes_k K \to B(K)$$

(en effet, ici encore, π transforme une base de $E \otimes K$ en une base de $B(K)$. On pose

$$T(K) = B(K) \cap GL_n(K) ,$$

le groupe $T(K)$ est donc le groupe des éléments inversibles de $B(K)$; en effet si $x \in B(K)^*$ alors $x \in GL_n(K)$.

Réciproquement, si $x \in B(K)$ a un déterminant non nul, l'application $y \mapsto xy$ de $B(K)$ est K-linéaire et injective (puisque x a un inverse dans

$GL_n(K)$), donc surjective, et il existe donc $y \in B(K)$ tel que $xy = 1$. La définition de $T(K)$ montre que T est un sous-groupe algébrique commutatif de GL_n.

Prenons en particulier pour K une extension algébriquement close $\bar{k}$ de k; l'algèbre $B(\bar{k})$ est diagonalisable (cf. [3] chap. V, p. 29, Prop. 2); elle est donc isomorphe sur $\bar{k}$ à l'algèbre produit $\bar{k}^n$, par conséquent, le groupe $T(\bar{k})$ est isomorphe à $(\bar{k}*)^n$ ce qui démontre la

PROPOSITION 1. *Le groupe T est un tore maximal de $GL(n)$ défini sur k (et donc un sous-groupe de Cartan)* (cf. [1], § 8.5, p. 205 et 316).

Remarque. Dans le cas où E est un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$, l'homomorphisme π donne bien un plongement de E dans une algèbre $B(\mathbf{Q})$ de matrices rationnelles.

Chapitre II

CLASSES D'IDÉAUX ET EXTENSIONS ALGÉBRIQUES

On suppose maintenant que k est un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$ et que E est une extension de k.

Si v (resp. w) est une place de k (resp. de E), on note k_v (resp. E_w) le complété de k (resp. de E) en cette place et on pose:

$$F_v = \prod_{w|v} E_w .$$

On note μ_w l'application

$$\Sigma\lambda_i \otimes \omega_i \to \Sigma\lambda_i\omega_i$$

de $E \otimes k_v$ dans E_w (elle n'est pas injective), et si les places de E au-dessus de la place v de k sont les places $w_1, ..., w_s$, on note

$$\mu : E \otimes k_v \to F_v$$

l'application telle que

$$\mu(x) = (\mu_1(x), ..., \mu_s(x)) .$$

C'est un isomorphisme de k_v-algèbres (cf. [6], Th. 4, p. 56).