$GL_n(K)$), donc surjective, et il existe donc $y \in B(K)$ tel que $xy = 1$. La définition de $T(K)$ montre que T est un sous-groupe algébrique commutatif de GL_n.

Prenons en particulier pour K une extension algébriquement close $\bar{k}$ de k; l'algèbre $B(\bar{k})$ est diagonalisable (cf. [3] chap. V, p. 29, Prop. 2); elle est donc isomorphe sur $\bar{k}$ à l'algèbre produit $\bar{k}^n$, par conséquent, le groupe $T(\bar{k})$ est isomorphe à $(\bar{k}*)^n$ ce qui démontre la

PROPOSITION 1. *Le groupe T est un tore maximal de $GL(n)$ défini sur k (et donc un sous-groupe de Cartan)* (cf. [1], § 8.5, p. 205 et 316).

Remarque. Dans le cas où E est un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$, l'homomorphisme π donne bien un plongement de E dans une algèbre $B(\mathbf{Q})$ de matrices rationnelles.

Chapitre II

CLASSES D'IDÉAUX ET EXTENSIONS ALGÉBRIQUES

On suppose maintenant que k est un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$ et que E est une extension de k.

Si v (resp. w) est une place de k (resp. de E), on note k_v (resp. E_w) le complété de k (resp. de E) en cette place et on pose:

$$F_v = \prod_{w|v} E_w .$$

On note μ_w l'application

$$\Sigma\lambda_i \otimes \omega_i \to \Sigma\lambda_i\omega_i$$

de $E \otimes k_v$ dans E_w (elle n'est pas injective), et si les places de E au-dessus de la place v de k sont les places $w_1, ..., w_s$, on note

$$\mu : E \otimes k_v \to F_v$$

l'application telle que

$$\mu(x) = (\mu_1(x), ..., \mu_s(x)) .$$

C'est un isomorphisme de k_v-algèbres (cf. [6], Th. 4, p. 56).

Soit ν le morphisme tel que l'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \otimes k_v \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mu"'] & B(k_v) \arrow[d, "\nu"] \\ & F_v \end{tikzcd}$$

Soit r l'anneau des entiers de k et r_v l'adhérence de r dans k_v; on note en outre R l'anneau des entiers de E et R_w son adhérence dans E_w. (C'est le sous-anneau compact maximal de E_w (cf. [6], Cor. 1, p. 83)).

Enfin, on pose

$$D_v = \prod_{w|v} R_w ;$$

c'est le sous-anneau compact maximal de l'algèbre F_v.

Remarquons que $R \otimes r_v$ est le sous-anneau compact maximal de $E \otimes k_v$. En effet, puisque R est de type fini sur r, l'anneau $R \otimes r_v$ est compact, et son image par μ_i est dense dans R_{w_i} (car R est dense dans R_{w_i}), donc lui est égale; on obtient $\mu(R \otimes r_v) = D_v$. C.Q.F.D.

Posons $\pi(R \otimes r_v) = C_v$;

on a donc un diagramme d'isomorphismes de r_v-algèbres et de sous-anneaux compacts maximaux:

$$\begin{tikzcd} R \otimes r_v \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mu"'] & C_v \arrow[d, "\nu"] \\ & D_v \end{tikzcd}$$

On pose enfin

$$B(r_v) = B(k_v) \cap M_n(r_v) ,$$

$$G_v = \Sigma \omega_i r_v \subset E \otimes k_v ;$$

G_v est un sous r_v-module de $E \otimes k_v$, et $B(r_v)$ est un sous-anneau de C_v, car $B(r_v)$ est compact.

Remarque. On a $\pi(G_v) \subset B(r_v)$ si et seulement si $\pi(\omega_i) \in M_n(r_v)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; autrement dit si les coefficients de la table de multiplication

$$\omega_h \omega_j = \Sigma a_{ij}^h \omega_i$$

sont dans r_v; en effet, on a

$$\pi(\omega_h) = (a_{ij}^h)_{1 \leqslant i, j \leqslant n} .$$

D'autre part, notons ω^* la base duale de ω (cf. [1], p. 451); on a $B(r_v) \subset \pi(G_v)$ si et seulement si $\pi(\omega_i^*) \in M_n(r_v)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Il s'ensuit que G_v est un sous-anneau compact de $E \otimes k_v$ dès que $\pi(G_v) \subset B(r_v)$. On a alors les résultats suivants:

PROPOSITION 2. 1) *Pour presque toute place v, on a*

$$\pi(G_v) = B(r_v) .$$

2) *Pour presque toute place v, on a*

$$G_v = R \otimes r_v .$$

Démonstration. Pour 1) on utilise la remarque ci-dessus. Pour 2) on voit que $\mu(G_v) = D_v$ en utilisant [6] Th. 4, p. 57. On a donc presque toujours le diagramme d'isomorphismes

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{G_v} = R \otimes \mathrm{r_v} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mu"'] & \mathrm{B(r_v)} = \mathrm{C_v} \arrow[d, "\mathrm{v}"] \\ & \mathrm{D_v} \end{tikzcd}$$

Remarque. Supposons l'anneau r principal, alors le r-module R admet une base. En effet, un module sans torsion de type fini sur un anneau principal est un module libre de rang fini (cf. [3], ch. VII, p. 19, Cor. 2).

Si ω est une telle base, c'est évidemment une base de E sur k. La table de multiplication de cette base est alors à coefficients dans r, on a donc:

$$\pi(R) \subset B(r) = B(k) \cap M_n(r)$$

et par conséquent

$$C_v = \pi(R \otimes r_v) \subset B(r_v) ,$$

donc $C_v = B(r_v)$; d'autre part

$$R \otimes r_v = \Sigma \omega_i r_v = G_v .$$

Il s'ensuit donc que lorsque l'anneau r est principal, et que l'on prend pour ω une base de R sur r, on a à chaque place v sans exception le diagramme (*).

Ecrivons $\vee(B(r_v)) = \prod_{w|v} O_w$; alors O_w est un sous-anneau de R_w. Soit S l'ensemble des places de k telles que $B(r_v) \neq C_v$. On a $O_w = R_w$ dès que w ne divise aucune place de S. Posons:

$$O = \bigcap_w (O_w \cap E) ;$$

alors O est un ordre de E et O est dense dans O_w.
On pose

$$T(r_v) = B(r_v)^\times = \{x \in B(r_v) \mid \det x \in r_v^\times\}$$

Le groupe $T(r_v)$ est un sous-groupe compact de $T(k_v)$; il est maximal dès que $v \notin S$; on a un isomorphisme

$$T(r_v) \overset{\vee}{\to} \prod_{w|v} O_w^\times .$$

Posons

$$T(\hat{r}) = \prod_v T(r_v) \qquad \text{et} \qquad \hat{O}^\times = \prod_w O_w^\times ;$$

Notons $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{A}_E$) l'anneau des adèles de k (resp. de E) et $T(\mathbf{A})$ le groupe des points de T à valeurs dans $\mathbf{A}$. Avec ces notations, le résultat suivant est immédiat:

PROPOSITION 3. *L'application* $\vee$ *induit un isomorphisme*

$$T(k)\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{r}) \to E^\times \backslash \mathbf{A}_E^\times / \hat{O}^\times .$$

Si $S = \emptyset$, par exemple dans le cas où ω est une base de R sur r, on a $O_w = R_w$ et

$$\hat{O}^\times = \prod_w R_w^\times .$$

En définitive, on obtient le résultat suivant.

Supposons $G_v = R \otimes r_v$ pour tout v. Cette condition est vérifiée si ω est une base de R sur r, ce qui est toujours possible si r est principal.
Si X est une partie de k, notons $[X]_v$ son adhérence dans k_v.

Pour $x \in T(\mathbf{A})$, soit $I_T(x)$ le réseau de k^n tel que

$$[I_T(x)]_v = r_v^n x_v \qquad \text{pour toute place } v \text{ finie .}$$

Pour $c \in \mathbf{A}_E^\times$, soit $I_E(c)$ l'idéal fractionnaire de E tel que

$$[I_E(c)]_w = c_w R_w \qquad \text{pour toute place } w \text{ finie .}$$

Enfin, pour tout idéal fractionnaire I de E on note $\Omega^{-1}(I)$ son image par l'isomorphisme Ω^{-1}.

Proposition 4. *Avec les notations précédentes, si* ω *est une base de* R *sur* r, *le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_E^\times \arrow[r, "\nu^{-1}"] \arrow[d, "I_E"'] & T(\mathbf{A}) \arrow[d, "I_T"] \\
\text{Idéaux de } E \arrow[r, "\Omega^{-1}"] & \text{Réseaux de } k^n
\end{tikzcd}$$

Démonstration. 1°) Soit $z_v \in (E \otimes k_v)^\times$. On a

$$\Omega^{-1}(z_v \cdot G_v) = \Omega^{-1} \circ u_{z_v}(G_v)$$

et puisque $G_v = \Omega(r_v^n)$, il vient $\Omega^{-1}(z_v \cdot G_v) = \Omega^{-1} \circ u_{z_v} \circ \Omega(r_v^n)$ et donc

(1) $$\Omega^{-1}(z_v \cdot G_v) = r_v^n \cdot \pi(z_v) .$$

2°) Soit $(c_w)_{w|v} \in \prod_{w|v} E_w^\times$. Si $G_v = R \otimes r_v$, on a $\mu^{-1}(\Pi R_w) = G_v$ et donc

(2) $$\mu^{-1}((c_w)_{w|v}) \cdot G_v = \mu^{-1}(\Pi c_w \cdot R_w) .$$

3°) Soit $c \in \mathbf{A}_E^\times$. On a

$$\mu([I_E(c)]_v) = \Pi c_w R_w .$$

D'autre part la relation (2) implique $\Pi c_w R_w = \mu(\mu^{-1}(c)_v \cdot G_v)$; on a donc

$$[I_E(c)]_v = \mu^{-1}(c)_v \cdot G_v .$$

Par la relation (1), il vient

$$\begin{aligned}
[\Omega^{-1} I_E(c)]_v &= \Omega^{-1}([I_E(c)]_v) = \Omega^{-1}(\mu^{-1}(c)_v \cdot G_v) \\
&= r_v^n \cdot \pi \circ \mu^{-1}(c)_v = r_v^n \cdot \nu^{-1}(c)_v
\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\Omega^{-1}(I_E(c)) = I_T(\nu^{-1}(c))$$

et démontre la proposition.

Chapitre III

DÉFINITION ET CONVERGENCE DES SÉRIES D'EISENSTEIN

Dans tout ce chapitre, k désignera un corps global et $\mathbf{A}_k$ les adèles de k.

1. MESURES SUR $\mathbf{A}_k$ ET $\mathbf{A}_k^\times$

On s'intéresse d'abord aux places infinies de k (dans le cas où l'extension k est un corps de nombres). Sur le corps $\mathbf{R}$, on choisit la mesure de Lebesgue usuelle notée dx et sur le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^\times$, on choisit la mesure de Haar $\dfrac{dx}{|x|}$. Sur le corps $\mathbf{C}$, on choisit la mesure

$$|dz \wedge d\bar{z}| = 2dx\,dy$$

et sur le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^\times$, on prend comme mesure la mesure de Haar:

$$|z|^{-2}\,|dz \wedge d\bar{z}|.$$

Pour chaque place finie v de k, on note α_v une mesure de Haar sur k_v complété de k en cette place. Soit r_v le sous-anneau compact maximal de k_v on suppose que pour presque tout v, le réel positif $m_v = \alpha_v(r_v)$ est égal à 1 Alors sur le corps global $\mathbf{A}_k$, il existe une unique mesure notée α qui coïncide avec la mesure produit $\Pi\alpha_v$ sur chacun des sous-groupes ouverts $\prod_{v\in P} k_v \cdot \prod_{v\notin P} r_v$ de $\mathbf{A}_k$ où P est un ensemble fini de places de k contenant au moins les places infinies. Alors α est une mesure de Haar sur le corps $\mathbf{A}_k$ Sur le groupe multiplicatif $k_v^\times$, on sait que la mesure $\dfrac{d\alpha_v(x)}{|x|_v}$ est une mesure de Haar. ($|x|_v$ désignant le module de $x \in k_v$).