DÉFINITION ET CONVERGENCE DES SERIES D'EISENSTEIN

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

ce qui prouve que

$$\Omega^{-1}(I_E(c)) = I_T(\nu^{-1}(c))$$

et démontre la proposition.

Chapitre III

Définition et convergence des séries d'Eisenstein

Dans tout ce chapitre, k désignera un corps global et $\mathbf{A}_k$ les adèles de k.

1. Mesures sur $\mathbf{A}_k$ et $\mathbf{A}_k^\times$

On s'intéresse d'abord aux places infinies de k (dans le cas où l'extension k est un corps de nombres). Sur le corps $\mathbf{R}$, on choisit la mesure de Lebesgue usuelle notée dx et sur le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^\times$, on choisit la mesure de Haar $\frac{dx}{|x|}$. Sur le corps $\mathbf{C}$, on choisit la mesure

$$|dz \wedge d\bar{z}| = 2dx\,dy$$

et sur le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^\times$, on prend comme mesure la mesure de Haar:

$$|z|^{-2}\,|dz \wedge d\bar{z}|.$$

Pour chaque place finie v de k, on note α_v une mesure de Haar sur k_v complété de k en cette place. Soit r_v le sous-anneau compact maximal de k_v on suppose que pour presque tout v, le réel positif $m_v = \alpha_v(r_v)$ est égal à 1 Alors sur le corps global $\mathbf{A}_k$, il existe une unique mesure notée α qui coïncide avec la mesure produit $\Pi\alpha_v$ sur chacun des sous-groupes ouverts $\prod_{v\in P} k_v \cdot \prod_{v\notin P} r_v$ de $\mathbf{A}_k$ où P est un ensemble fini de places de k contenant au moins les places infinies. Alors α est une mesure de Haar sur le corps $\mathbf{A}_k$ Sur le groupe multiplicatif $k_v^\times$, on sait que la mesure $\frac{d\alpha_v(x)}{|x|_v}$ est une mesure de Haar. ($|x|_v$ désignant le module de $x \in k_v$).

Soit π_v une uniformisante de k_v; on choisira comme mesure de Haar sur $k_v^\times$, la mesure $d\mu_v$ définie par

$$d\mu_v(x) = \frac{|\pi_v|_v}{|\pi_v|_v - 1} \cdot \frac{d\alpha_v(x)}{|x|_v},$$

de sorte que l'on a le:

LEMME. *Pour toute place finie* v,

$$\int_{|x|_v=1} d\mu_v(x) = m_v .$$

Démonstration.

$$m_v = \int_{x\in r_v} d\alpha_v(x) = \int_{|x|_v \leqslant 1} d\alpha_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|x|_v=|\pi_v|_v^{+n}} d\alpha_v(x)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} |\pi_v|^{-n} \int_{|x|_v=1} d\alpha_v(x) = \left(1 - \frac{1}{|\pi_v|_v}\right)^{-1} \int_{|x|_v=1} d\alpha_v(x)$$
$$= \frac{|\pi_v|_v}{|\pi_v|_v - 1} \int_{|x|_v=1} \frac{d\alpha_v(x)}{|x|_v} = \int_{|x|_v=1} d\mu_v(x) .$$

Alors on définit la mesure de Haar μ sur $\mathbf{A}_k^\times$ comme l'unique mesure coïncidant avec la mesure produit $\prod_v \mu_v$ sur chacun des sous-groupes $\prod_{v\in P} k_v^\times \cdot \prod_{v\notin P} r_v^\times$.

2. SÉRIES D'EISENSTEIN

Dans la suite, G désignera le groupe algébrique GL_n; V un espace vectoriel de dimension n, $e = (0, ..., 0, 1)$ le dernier élément de la base canonique de V et $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat définies sur le vectoriel $V(\mathbf{A}_k)$ de la manière suivante:

On dira d'abord qu'une fonction f à valeurs complexes définie sur le vectoriel $V(\mathbf{A}_k)$ est décomposable si elle s'écrit comme un produit

$$f(x) = \prod_v f_v(x_v) .$$

Pour les places infinies éventuelles, on demande que f_v soit dans $\mathcal{S}(V(k_v))$ l'espace des fonctions C^∞ à valeurs complexes à décroissance rapide, i.e. quel que soit $\alpha \in \mathbf{N}^{an}$ (avec $a = 1$ si $k_v = \mathbf{R}$ et $a = 2$ si $k_v = \mathbf{C}$) et quel que soit $N > 1$ il existe $C > 0$ tel que

$$| \partial^{\alpha} f_v(t_v) | \leqslant C(1 + \|t_v\|)^{-N}$$

quel que soit $t_v \in k_v$.

Pour les places finies v, on demande que f_v soit dans l'espace des fonctions à valeurs complexes localement constantes et à support compact. On notera également cet espace $\mathscr{S}(V(k_v))$. Enfin pour presque toute place finie v, f_v est la fonction caractéristique du réseau r_v^n.

Le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ est alors l'espace des combinaisons linéaires finies de fonctions décomposables telles que $f_v \in \mathscr{S}(V(k_v))$ pour toute place v.

PROPOSITION 5. *Soit x une matrice de $G(\mathbf{A}_k)$, φ une fonction de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$, ω un quasi-caractère de $\mathbf{A}_k^{\times}$ (i.e. un morphisme continu de $\mathbf{A}_k^{\times}$ dans $\mathbf{C}^{\times}$ trivial sur $k^{\times}$), σ l'unique réel tel que*

$$| \omega | = \omega_{\sigma} \quad \text{où} \quad \omega_{\sigma}(t) = | t |_{\mathbf{A}_k}^{\sigma} ;$$

alors l'intégrale

$$M(\varphi, x, \omega) = \int_{\mathbf{A}_k \times} \varphi(\text{et } x)\omega(\det tx) d\mu(t)$$

converge pour σ réel plus grand que $1/n$.

Démonstration. On peut supposer que la matrice x est la matrice unité et que la fonction φ est décomposable:

$$\varphi = \prod_v \varphi_v , \qquad \varphi_v \in \mathscr{S}(V(k_v))$$

et φ_v est la fonction caractéristique de r_v^n pour presque toute place finie v. Soit K_v le support de la fonction φ_v, il existe un entier c_v tel que

$$K_v \subset \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n ,$$

où r_v^n désigne le r_v-module engendré dans $V(k_v)$ par la base canonique. Soit σ_v la fonction caractéristique de $\pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$ et M_v le réel positif défini par

$$M_v = \sup_{x \in V(k_v)} | \varphi_v(x) | ;$$

on a l'égalité suivante:

$$| \varphi_v(x) | \leqslant M_v \cdot \sigma_v(x) .$$

D'autre part

$$\int_{k_v^\times} \sigma_v(et_v) \cdot |\, t_v \,|_v^{n\sigma} \, d\mu_v(t_v) = \int_{|t_v|_v \leqslant |\pi_v|_v^{-c_v}} |\, t_v \,|_v^{n\sigma} \, d\mu_v(t_v) \, ,$$

car

$$et_v = (0, ..., 0, t_v) \in \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$$

si et seulement si

$$|\, t_v \,|_v \leqslant |\, \pi_v \,|_v^{-c_v} .$$

Mais

$$\int_{|t_v| \leqslant |\pi_v|_v^{-c_v}} |\, t_v \,|_v^{n\sigma} \, d\mu_v(t_v) = \sum_{r_v = -c_v}^{\infty} \int_{|t_v|_v = |\pi_v|_v^{r_v}} |\, \pi_v \,|_v^{r_v n\sigma} \, d\mu_v(t_v) \, .$$

Posons $q_v = |\, \pi_v \,|_v^{-1} > 1$; on obtient:

$$\sum_{r_v = -c_v}^{\infty} q_v^{-r_v n\sigma} \cdot \int_{|t_v|_v = 1} d\mu_v(t_v) = m_v \, q_v^{c_v n\sigma} \cdot \sum_{r_v = 0}^{\infty} q_v^{-r_v n\sigma}$$

$$= m_v \, q_v^{c_v n\sigma} (1 - q_v^{-n\sigma})^{-1} \quad \text{lorsque } \sigma > 0 \, .$$

Les réels M_v et m_v sont presque toujours égaux à 1 et l'entier c_v presque toujours nul, donc le produit des intégrales

$$\int_{k_v^\times} |\, \varphi_v(et_v) \,| \cdot |\, t_v \,|_v^{n\sigma} \, d\mu_v(t_v)$$

aux places finies est convergent lorsque le produit $\prod_v (1 - q_v^{-n\sigma})^{-1}$ converge, c'est-à-dire quand $n\sigma > 1$ ou encore $\sigma > 1/n$.

Aux places infinies l'intégrale converge si elle converge à l'origine autrement dit si $\sigma > 0$. La proposition 5 est démontrée.

Soit P le sous-groupe de G des matrices qui s'écrivent

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

où a est une matrice de GL_{n-1}, b est un vecteur colonne ayant $(n-1)$ composantes, d est un élément de l'anneau de base tel que $d \cdot \det a$ soit inversible dans cet anneau; on définit les séries d'Eisenstein de la manière suivante:

Proposition 6. *Pour* $x \in G(\mathbf{A}_k)$, ω *un quasi-caractère de* $\mathbf{A}_k^\times$ *tel que*

$$|\omega| = \omega_\sigma, \quad \sigma \in \mathbf{R},$$

la série

$$E(\varphi, x, \omega) = \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} M(\varphi, \gamma x, \omega)$$

converge pour $\sigma > 1$; *on l'appelle la série d'Eisenstein associée à la fonction* φ *de* $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$.

Enonçons d'abord le résultat suivant:

Lemme. *L'intégrale*

$$I_1 = \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} |t|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k)-\{0\}} |\varphi(\xi t x)| \, d\mu(t)$$

est convergente si $\sigma > 1$.

Démonstration. Comme la fonction φ de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ est quelconque, on peut supposer $x = 1$.

A) *k de caractéristique* 0.

Soit P_∞ l'ensemble des places infinies de k, on pose:

$$\Omega(P_\infty) = \prod_{v \in P_\infty} k_v^\times \cdot \prod_{v \notin P_\infty} r_v^\times .$$

On sait que le groupe $\Omega(P_\infty) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$ est fini, isomorphe au groupe C_k des classes d'idéaux de k. Soit Y un système de représentants dans $\mathbf{A}_k^\times$ du quotient $\Omega(P_\infty) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$; l'application canonique de $Y \cdot \Omega(P_\infty)$ dans $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$ est surjective.
Supposons qu'un élément α de $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$ s'écrive de deux manières distinctes:

$$\alpha = y_1 \omega_1 = y_2 \omega_2 ,$$

avec

$$y_1, y_2 \in Y \quad \text{et} \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega(P_\infty) .$$

Alors il existe α dans $k^\times$ tel que

$$\alpha y_1 \omega_1 = y_2 \omega_2 ,$$

ce qui entraîne l'égalité de y_1 et y_2 car ce sont des représentants du quotient $k^\times \cdot \Omega(P_\infty) \backslash \mathbf{A}_k^\times$. Ainsi c'est-à-dire $\alpha \in r^\times$, r désignant l'anneau des entiers de k. On a donc un isomorphisme

$$Y \cdot r^\times \backslash \Omega(P_\infty) \to k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times .$$

L'intégrale I_1 se réécrit

$$I_1 = \sum_{y \in Y} \int_{t \in r^\times \backslash \Omega(P_\infty)} |\, yt \,|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\, \varphi(\xi y t) \,| \, d\mu(t)$$
$$\leqslant \sum_{y \in Y} \int_{t \in \Omega(P_\infty)} |\, yt \,|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\, \varphi(\xi y t) \,| \, d\mu(t) .$$

La fonction φ étant quelconque, on se borne à étudier la convergence de

$$\int_{t \in \Omega(P_\infty)} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\, \varphi(\xi t) \,| \cdot |\, t \,|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \, d\mu(t) ,$$

ou encore celle de

$$I_2 = \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \int_{t \in \Omega(P_\infty)} |\, \varphi(\xi t) \,| \cdot |\, t \,|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \, d\mu(t) ,$$

ce qui se réécrit

(1) $$I_2 = \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \left[\prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \cdot \prod_{v \notin P_\infty} J_v(\xi) \right],$$

avec

$$I_v(\xi) = \int_{t_v \in k_v^\times} |\, \varphi_v(\xi t_v) \,| \cdot |\, t_v \,|_{k_v}^{n\sigma} \, d\mu_v(t_v) ,$$

$$J_v(\xi) = \int_{t_v \in r_v^\times} |\, \varphi_v(\xi t_v) \,| \cdot d\mu_v(t_v) ,$$

et

$$\begin{aligned} |\, t_v \,|_{k_v} &= |\, t_v \,| \quad \text{si} \quad k_v = \mathbf{R} , \\ &= |\, t_v \,|^2 \quad \text{si} \quad k_v = \mathbf{C} . \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration de la proposition 2, on note K_v le support de la fonction φ_v, c_v l'entier tel que

$$K_v \subset \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n .$$

De plus, on note σ_v la fonction caractéristique de $\pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$ et M_v le réel positif défini par

$$M_v = \sup_{x \in V(k_v)} |\varphi_v(x)|$$

(l'entier c_v est nul et le réel M_v vaut 1 pour presque toutes les places finies v). Alors

$$(2) \qquad \prod_{v \notin P_\infty} J_v \leqslant \prod_{v \notin P_\infty} M_v \int_{t_v \in r_v^\times} \sigma_v(\xi t_v) d\mu_v(t_v) .$$

Donnons une condition sur ξ pour qu'en toute place finie v, $\xi t_v \in \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$.

Soit $f = \prod_{v \notin P_\infty} |\pi_v|_v^{-c_v} \in \mathbf{N} \subset r$ (r anneaux des entiers de k), alors

$$|f|_v = |\pi_v|_v^{c_v} ;$$

on a les équivalences successives suivantes:

$$\xi t_v \in \pi_v^{-c} \cdot r_v^n \Leftrightarrow |\xi|_v \leqslant |\pi_v|_v^{-c_v} \Leftrightarrow |\xi|_v \leqslant |f|_v^{-1} \Leftrightarrow |f\xi|_v \leqslant 1 \Leftrightarrow f\xi \in r_v^n ;$$

et on en déduit que ξt_v sera dans $\pi_v^{-c_v} r_v^n$ pour tout v fini si et seulement si $\xi \in f^{-1} r^n$. Si $\xi \notin f^{-1} r^n$, l'une au moins des intégrales $J_v(\xi)$ est nulle et il suffit donc, dans la définition de I_2, de sommer sur les $\xi \in f^{-1} r^n$. On en déduit alors de (1) et (2) la majoration

$$I_2 \leqslant \sum_{\xi \in f^{-1} r^n} \left(\prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \cdot \prod_{v \notin P_\infty} M_v \int_{t_v \in r_v^\times} d\mu_v(t_v) \right),$$

puis

$$I_2 \leqslant \left(\prod_{v \notin P_\infty} M_v \cdot m_v \right) \sum_{\xi \in f^{-1} r^n} \left[\prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \right],$$

où m_v est le réel positif défini en III.1.
Mais les fonctions φ_v où v est une place infinie sont à décroissance rapide donc:

$$\prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \leqslant \prod_{v \in P_\infty} C_{v,N} \int_{t_v \in k_v^\times} (1 + \|\xi t_v\|)^{-N} \cdot |t_v|^{\alpha n \sigma} d\mu_v(t_v) ,$$

où $\alpha = 1$ si $k_v = \mathbf{R}$, $\quad \alpha = 2$ si $k_v = \mathbf{C}$.
On fait le changement de variables suivant:

si v est une place réelle: $\qquad u_v = \| \xi \| \cdot t_v$,

si v est une place complexe: $\qquad u_v = \| \xi \|^{\frac{1}{2}} \cdot t_v$,

alors $| u_v |_{k_v} = \| \xi \| \cdot | t_v |_{k_v}$ de sorte que

$$\prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \leqslant \| \xi \|^{-n\sigma d} \prod_{v \in P_\infty} C_{v,N} \int_{u_v \in k_v^\times} (1+|u_v|_{k_v})^{-N} \cdot | u_v |_{k_v}^{n\sigma} \, d\mu_v(u_v) ,$$

où d désigne la dimension de k sur $\mathbf{Q}$.

— Si $k_v = \mathbf{R}$, l'intégrale correspondante dans le produit se réécrit:

$$\int_{t \in \mathbf{R}^\times} (1+|t|)^{-N} \cdot | t |^{n\sigma} \frac{dt}{| t |}$$

intégrale qui converge à l'infini si N est choisi assez grand et en 0 si $\sigma > 0$.

— Si $k_v = \mathbf{C}$, l'intégrale se réécrit:

$$2 \int_{z \in \mathbf{C}^\times} (1+|z|^2)^{-N} \cdot | z |^{2n\sigma - 2} \, dx \, dy = 2 \int_\rho \int_\theta (1+\rho^2)^{-N} \cdot \rho^{2n\sigma - 1} d\rho \, d\theta$$

$$= 4\pi \int_\rho (1+\rho^2)^{-N} \cdot \rho^{2n\sigma - 1} \, d\rho ,$$

intégrale qui converge à l'infini si N est choisi assez grand et en 0 si $2n\sigma - 1 > -1$ c'est-à-dire si $\sigma > 0$.

Il reste à montrer la convergence de la série

$$\sum_{\xi \in f^{-1} r^n} \| \xi \|^{-n\sigma d} = \sum_{\xi \in r^n} \| f^{-1} \xi \|^{-n\sigma d} = | f |^{n\sigma d} \cdot \sum_{\xi \in r^n} \| \xi \|^{-n\sigma d} ;$$

on est donc ramené à la convergence de

$$\sum_{\xi \in r^n} \| \xi \|^{-n\sigma d} .$$

Si la norme utilisée est la norme définie par

$$\| \xi \| = \sup_i | \xi_i | \quad \text{pour} \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) ,$$

on obtient les égalités suivantes:

$$\sum_{\xi \in r^n} \| \xi \|^{-n\sigma d} = \sum_{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in r^n} \sup_i | \xi_i |^{-n\sigma d}$$

$$= \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \sup_i | z_1^i \, \omega_1 + \ldots + z_d^i \omega_d |^{-n\sigma d} ,$$

avec $z = (z_1^1, \ldots, z_d^1, \ldots, z_1^n, \ldots, z_d^n)$, et $(\omega_1, \ldots, \omega_d)$ est une base fondamentale du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel k. Ainsi

$$\sum_{\xi \in r^n} \| \xi \|^{-n\sigma d} \leqslant | \omega_{i_0} |^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \sup_i | z_1^i + \ldots + z_d^i |^{-n\sigma d},$$

où ω_{i_0} est un élément de la base fondamentale tel que

$$| \omega_{i_0} | = \sup_{i=1 \text{ à } n} | \omega_i | .$$

On a encore les majorations suivantes:

$$\begin{aligned}\sum_{\xi \in r^n} \| \xi \|^{-n\sigma d} &\leqslant | \omega_{i_0} |^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} d^{-n\sigma d} \sup_i \sup_j | z_j^i |^{-n\sigma d} \\ &= | d\omega_{i_0} |^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \sup_{i,j} | z_j^i |^{-n\sigma d} \\ &= | d\omega_{i_0} |^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \| z \|^{-n\sigma d} .\end{aligned}$$

On sait que la série $\sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \| z \|^{-n\sigma d}$ converge pour $\sigma > 1$.

B) *k de caractéristique p*

On suppose que k est une extension algébrique de dimension finie du corps $\mathbf{F}_p(T)$. Pour chaque place v de k, k_v est de caractéristique p et si x est un élément de $k_v^\times$, le nombre $| x |_v$ est dans le sous-groupe Γ_0 de $\mathbf{R}_+^\times$ engendré par p. La même chose est vraie pour le module $| z |_{\mathbf{A}_k}$ où z est un élément de $\mathbf{A}_k^\times$. L'image de $\mathbf{A}_k^\times$ par le morphisme $z \mapsto | z |_{\mathbf{A}_k}$ est un sous-groupe non trivial du groupe Γ_0. Supposons qu'il soit engendré par un entier $Q = p^N$ avec N entier $\geqslant 1$.

Choisissons z_1 dans $\mathbf{A}_k$ tel que: $| z_1 |_{\mathbf{A}_k} = Q$. Alors $\mathbf{A}_k^\times$ est le produit direct de $\mathbf{A}_k^1$ et du sous-groupe noté Γ engendré par z_1 évidemment isomorphe à $\mathbf{Z}$. D'autre part, on pose

$$\Omega(\phi) = \prod_v r_v^\times ,$$

on sait que le groupe quotient $\Omega(\phi) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1$ est fini. C'est le groupe isomorphe au groupe des classes de diviseurs de degré 0. (Voir [6], p. 97).

Soit Y un système de représentants dans $\mathbf{A}_k^1$ de ce quotient; l'application canonique de $\Gamma \cdot Y$ dans $\Omega(\phi) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$ est bijective et on a également un isomorphisme

$$k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times \to \Gamma \cdot Y \big(\Omega(\phi) \cap k^\times \backslash \Omega(\phi) \big)$$

ou encore

$$k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times \to \Gamma \cdot Y(\mathbf{F}_q \backslash \Omega(\phi)),$$

où $\mathbf{F}_q$ est le corps des constantes de k c'est-à-dire le corps fini maximal contenu dans k. Ainsi l'intégrale I_1 se réécrit

$$I_1 = \sum_{y \in Y} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{t \in \mathbf{F}_q \backslash \Omega(\phi)} | z_1^m |_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} | \varphi(\xi z_1^m y t) | \, d\mu(t)$$

$$\leqslant \sum_{y \in Y} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{t \in \Omega(\phi)} | z_1^m |_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} | \varphi(\xi z_1^m y t) | \, d\mu(t).$$

La fonction φ étant quelconque, on se borne à étudier la convergence de

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{t \in \Omega(\phi)} | z_1^m |_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} | \varphi(\xi z_1^m t) | \, d\mu(t),$$

ou encore celle de

$$I_2 = \sum_{m \in \mathbf{Z}} | z_1 |_{\mathbf{A}_k}^{mn\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \int_{t \in \Omega(\phi)} | \varphi(\xi z_1^m t) | \, d\mu(t)$$

$$= \sum_{m \in \mathbf{Z}} | z_1 |_{\mathbf{A}_k}^{mn\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \prod_v \int_{t_v \in r_v^\times} | \varphi_v(\xi z_{1,v}^m t_v) | \, d\mu_v(t_v),$$

où $z_{1,v}$ désigne la composante en la place v de l'idèle z_1.
Déterminons un idèle z_1 particulier; on le choisit tel que: $z_1 = (z_{1,v})_v$ avec $z_{1,v} = 1$ pour $v \neq v_0$, $z_{1,v_0} = \pi_{v_0}$, v_0 étant une place quelconque de k.

Alors l'intégrale I_2 se réécrit:

$$I_2 = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \left(| \pi_{v_0} |^{mn\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \left[\prod_{v \neq v_0} J_v(\xi) \cdot \int_{t_{v_0} \in r_{v_0}^\times} | \varphi_{v_0}(\xi t_{v_0} \pi_{v_0}^m) | \, d\mu_{v_0}(t_{v_0}) \right] \right),$$

où comme précédemment $J_v(\xi)$ désigne l'intégrale

$$J_v(\xi) = \int_{t_v \in r_v^\times} | \varphi_v(\xi t_v) | \cdot d\mu_v(t_v).$$

On suppose toujours que $\varphi = \prod \varphi_v$ est une fonction décomposable de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ et que, pour toute place v, $| \varphi_v | \leqslant M_v \sigma_v$, où σ_v est la fonction caractéristique de $\pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$. Pour que le produit contenu dans l'expression I_2 soit non nul, il faut que l'élément ξ de $V(k) - \{0\}$ vérifie les conditions suivantes:

$$\| \xi \|_v \leqslant | \pi_v^{-c_v} |_v \quad \text{pour} \quad v \neq v_0 ,$$
$$\| \xi \|_{v_0} \leqslant | \pi_{v_0}^{-c_{v_0}-m} |_{v_0} .$$

Posons

$$L_v = p_v^{-c_v} , \quad L_{v_{0,m}} = p_{v_0}^{-(c_{v_0}+m)} , \quad \text{et} \quad L_m = (L_v)_v ;$$

alors L_m est un système cohérent de k_v-réseaux de rang 1. (Voir [6], p. 97).

Soit $\Lambda(L_m) = k \cap (\prod_v L_v)$, $\Lambda(L_m)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{F}_q$ des constantes de k dont on note sa dimension $\lambda(L_m)$. (Voir [6], p. 97). Le produit contenu dans I_2 est non nul (pour m fixé) si et seulement si $\xi \in \Lambda(L_m)$.

D'autre part, soit a_m le diviseur associé au système L_m:

$$a_m = \sum_{v \neq v_0} c_v \, v + (c_{v_0} + m) v_0 ;$$

on sait que si son degré

$$\deg a_m = \sum_{v \neq v_0} c_v \deg v + (c_{v_0} + m) \deg v_0$$

est strictement négatif, c'est-à-dire si

$$m < -c_{v_0} - (\deg v_0)^{-1} \cdot \sum_{v \neq v_0} c_v \deg v = M ,$$

alors $\lambda(L_m) = 0$ (voir [6], p. 100).

Il suffit donc dans l'expression I_2 de sommer pour $m \geqslant M$ de sorte que

$$I_2 \leqslant (\prod_v M_v m_v) \sum_{m \geqslant M} | \pi_{v_0} |^{mn\sigma} \cdot \sum_{\xi \in \Lambda(L_m)^n - \{0\}} (1) .$$

On doit étudier la convergence de

$$\sum_{m \geqslant M} | \pi_{v_0} |^{mn\sigma} (q^{n\lambda(L_m)} - 1) .$$

Sachant que pour m assez grand, le théorème de Riemann-Roch donne l'égalité

$$\lambda(L_m) = \deg a_m - g + 1 ,$$

où g est le genre de k (voir [6], Cor. 2 du Théorème 2, p. 101), on est ramené à la convergence de

$$\sum_{m \geqslant M} q^{-mn\sigma \deg v_0} q^{nm \deg v_0} = \sum_{m \geqslant M} q^{\deg v_0 (1-\sigma) mn} .$$

Cette série converge pour $\sigma > 1$.

Le résultat de la proposition 6 se déduit alors de:

PROPOSITION 7. *On a l'égalité*

$$E(\varphi, x, \omega) = \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi tx) d\mu(t)$$

pour ω *quasi-caractère d'exposant* $\sigma > 1$.

Démonstration. On construit l'application suivante:

$$P(k)\backslash G(k) \times k^\times \to V(k) - \{0\}$$
$$(\gamma, u) \mapsto eu\,\gamma_0$$

où γ_0 est une matrice dans la classe de γ dont le premier élément non nul sur la dernière ligne est égal à 1.

Puisque cette application est bijective, on peut écrire la série absolument convergente $\sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi tx)$ comme

$$\sum_{u \in k^\times} \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} \varphi(eu\,\gamma_0\, tx),$$

et par suite

$$\int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi tx) d\mu(t)$$
$$= \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \sum_{u \in k^\times} \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} \omega(\det tx)\, \varphi(eu\gamma_0 tx) d\mu(t)$$
$$= \int_{\mathbf{A}_k^\times} \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} \omega(\det tx)\, \varphi(\mathrm{et}\, \gamma_0\, x) d\mu(t)$$
$$= \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} \int_{\mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx)\, \varphi(\mathrm{et}\, \gamma_0\, x) d\mu(t)$$

puisqu'on a ici convergence absolue. Mais l'intégrale

$$M(\varphi, \gamma_0 x, \omega) = \int_{\mathbf{A}_k^\times} \varphi(\mathrm{et}\, \gamma_0\, x) \omega(\det tx) d\mu(t)$$

ne dépend pas du représentant choisi dans la classe γ de $P(k)\backslash G(k)$, ainsi on a bien

$$\begin{aligned}
&\int_{k^\times\backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx)\cdot \sum_{\xi\in V(k)-\{0\}} \varphi(\xi tx)d\mu(t)\\
&= \sum_{\gamma\in P(k)\backslash G(k)} \int_{\mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx)\ \varphi(\mathrm{et}\ \gamma x)d\mu(t)\\
&= E(\varphi, x, \omega)\,.
\end{aligned}$$

Chapitre IV

Le prolongement analytique des séries d'Eisenstein

Dans la suite, k désigne un corps global, E une extension de dimension n sur k et $V(k)$ l'espace vectoriel sur k sous-jacent à E.

1. La formule de Poisson

Soit χ un caractère de $\mathbf{A}_k$ non trivial, trivial sur k et soit (x, y) la formule bilinéaire symétrique sur $V(\mathbf{A}_k)$ non dégénérée définie par

$$(x, y) = Tr(xy)\,,$$

où Tr désigne la trace absolue $Tr_{E/k}$; alors on peut identifier $V(\mathbf{A}_k)$ avec son dual topologique par l'isomorphisme qui a un élément x de $V(\mathbf{A}_k)$ associe le caractère $\chi(x, y)$ de $V(\mathbf{A}_k)$.

Soit α la mesure de Tamagawa de $\mathbf{A}_E$ pour laquelle le quotient $E\backslash\mathbf{A}$ est de mesure 1, avec l'identification précédente; la transformée de Fourier d'une fonction φ de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ est définie par

$$\hat{\varphi}(y) = \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(x)\,\overline{\chi(x, y)}\,d\alpha(x), \qquad \text{pour} \qquad y\in V(\mathbf{A}_k)\,,$$

et la formule de Poisson pour le sous-groupe discret à quotient compact $V(k)$ dans $V(\mathbf{A}_k)$ s'écrit

$$\sum_{x\in V(k)} \varphi(x) = \sum_{y\in V(k)} \hat{\varphi}(y) \qquad \text{pour} \qquad \varphi\in\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))\,,$$

l'orthogonal de $V(k)$ s'identifiant à $V(k)$.