1. Mesures sur A_k et A_k^x

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.08.2024**

ce qui prouve que

$$\Omega^{-1}(I_E(c)) = I_T(\nu^{-1}(c))$$

et démontre la proposition.

Chapitre III

Définition et convergence des séries d'Eisenstein

Dans tout ce chapitre, k désignera un corps global et $\mathbf{A}_k$ les adèles de k.

1. Mesures sur $\mathbf{A}_k$ et $\mathbf{A}_k^\times$

On s'intéresse d'abord aux places infinies de k (dans le cas où l'extension k est un corps de nombres). Sur le corps $\mathbf{R}$, on choisit la mesure de Lebesgue usuelle notée dx et sur le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^\times$, on choisit la mesure de Haar $\dfrac{dx}{|x|}$. Sur le corps $\mathbf{C}$, on choisit la mesure

$$|dz \wedge d\bar{z}| = 2dx\,dy$$

et sur le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^\times$, on prend comme mesure la mesure de Haar:

$$|z|^{-2}\,|dz \wedge d\bar{z}|.$$

Pour chaque place finie v de k, on note α_v une mesure de Haar sur k_v complété de k en cette place. Soit r_v le sous-anneau compact maximal de k_v on suppose que pour presque tout v, le réel positif $m_v = \alpha_v(r_v)$ est égal à 1 Alors sur le corps global $\mathbf{A}_k$, il existe une unique mesure notée α qui coïncide avec la mesure produit $\Pi\alpha_v$ sur chacun des sous-groupes ouverts $\prod_{v\in P} k_v \cdot \prod_{v\notin P} r_v$ de $\mathbf{A}_k$ où P est un ensemble fini de places de k contenant au moins les places infinies. Alors α est une mesure de Haar sur le corps $\mathbf{A}_k$ Sur le groupe multiplicatif $k_v^\times$, on sait que la mesure $\dfrac{d\alpha_v(x)}{|x|_v}$ est une mesure de Haar. ($|x|_v$ désignant le module de $x \in k_v$).

Soit π_v une uniformisante de k_v; on choisira comme mesure de Haar sur $k_v^\times$, la mesure $d\mu_v$ définie par

$$d\mu_v(x) = \frac{|\pi_v|_v}{|\pi_v|_v - 1} \cdot \frac{d\alpha_v(x)}{|x|_v},$$

de sorte que l'on a le:

LEMME. *Pour toute place finie* v,

$$\int_{|x|_v = 1} d\mu_v(x) = m_v .$$

Démonstration.

$$m_v = \int_{x \in r_v} d\alpha_v(x) = \int_{|x|_v \leqslant 1} d\alpha_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|x|_v = |\pi_v|_v^{+n}} d\alpha_v(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |\pi_v|^{-n} \int_{|x|_v = 1} d\alpha_v(x) = \left(1 - \frac{1}{|\pi_v|_v}\right)^{-1} \int_{|x|_v = 1} d\alpha_v(x)$$

$$= \frac{|\pi_v|_v}{|\pi_v|_v - 1} \int_{|x|_v = 1} \frac{d\alpha_v(x)}{|x|_v} = \int_{|x|_v = 1} d\mu_v(x) .$$

Alors on définit la mesure de Haar μ sur $\mathbf{A}_k^\times$ comme l'unique mesure coïncidant avec la mesure produit $\prod_v \mu_v$ sur chacun des sous-groupes $\prod_{v \in P} k_v^\times \cdot \prod_{v \notin P} r_v^\times$.

2. SÉRIES D'EISENSTEIN

Dans la suite, G désignera le groupe algébrique GL_n; V un espace vectoriel de dimension n, $e = (0, ..., 0, 1)$ le dernier élément de la base canonique de V et $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat définies sur le vectoriel $V(\mathbf{A}_k)$ de la manière suivante:

On dira d'abord qu'une fonction f à valeurs complexes définie sur le vectoriel $V(\mathbf{A}_k)$ est décomposable si elle s'écrit comme un produit

$$f(x) = \prod_v f_v(x_v) .$$

Pour les places infinies éventuelles, on demande que f_v soit dans $\mathscr{S}(V(k_v))$ l'espace des fonctions C^∞ à valeurs complexes à décroissance rapide, i.e. quel que soit $\alpha \in \mathbf{N}^{an}$ (avec $a = 1$ si $k_v = \mathbf{R}$ et $a = 2$ si $k_v = \mathbf{C}$) et quel