

## 2. SÉRIES D'EISENSTEIN

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Soit  $\pi_v$  une uniformisante de  $k_v$ ; on choisira comme mesure de Haar sur  $k_v^\times$ , la mesure  $d\mu_v$  définie par

$$d\mu_v(x) = \frac{|\pi_v|_v}{|\pi_v|_v - 1} \cdot \frac{d\alpha_v(x)}{|x|_v},$$

de sorte que l'on a le :

LEMME. *Pour toute place finie  $v$ ,*

$$\int_{|x|_v=1} d\mu_v(x) = m_v.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} m_v &= \int_{x \in r_v} d\alpha_v(x) = \int_{|x|_v \leq 1} d\alpha_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|x|_v = |\pi_v|_v^{+n}} d\alpha_v(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\pi_v|_v^{-n} \int_{|x|_v=1} d\alpha_v(x) = \left(1 - \frac{1}{|\pi_v|_v}\right)^{-1} \int_{|x|_v=1} d\alpha_v(x) \\ &= \frac{|\pi_v|_v}{|\pi_v|_v - 1} \int_{|x|_v=1} \frac{d\alpha_v(x)}{|x|_v} = \int_{|x|_v=1} d\mu_v(x). \end{aligned}$$

Alors on définit la mesure de Haar  $\mu$  sur  $\mathbf{A}_k^\times$  comme l'unique mesure coïncidant avec la mesure produit  $\prod_v \mu_v$  sur chacun des sous-groupes

$$\prod_{v \in P} k_v^\times \cdot \prod_{v \notin P} r_v^\times.$$

## 2. SÉRIES D'EISENSTEIN

Dans la suite,  $G$  désignera le groupe algébrique  $GL_n$ ;  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $e = (0, \dots, 0, 1)$  le dernier élément de la base canonique de  $V$  et  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$  l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat définies sur le vectoriel  $V(\mathbf{A}_k)$  de la manière suivante :

On dira d'abord qu'une fonction  $f$  à valeurs complexes définie sur le vectoriel  $V(\mathbf{A}_k)$  est décomposable si elle s'écrit comme un produit

$$f(x) = \prod_v f_v(x_v).$$

Pour les places infinies éventuelles, on demande que  $f_v$  soit dans  $\mathcal{S}(V(k_v))$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  à valeurs complexes à décroissance rapide, i.e. quel que soit  $\alpha \in \mathbf{N}^{an}$  (avec  $a = 1$  si  $k_v = \mathbf{R}$  et  $a = 2$  si  $k_v = \mathbf{C}$ ) et quel

que soit  $N > 1$  il existe  $C > 0$  tel que

$$|\partial^\alpha f_v(t_v)| \leq C(1 + \|t_v\|)^{-N}$$

quel que soit  $t_v \in k_v$ .

Pour les places finies  $v$ , on demande que  $f_v$  soit dans l'espace des fonctions à valeurs complexes localement constantes et à support compact. On notera également cet espace  $\mathcal{S}(V(k_v))$ . Enfin pour presque toute place finie  $v$ ,  $f_v$  est la fonction caractéristique du réseau  $r_v^n$ .

Le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$  est alors l'espace des combinaisons linéaires finies de fonctions décomposables telles que  $f_v \in \mathcal{S}(V(k_v))$  pour toute place  $v$ .

**PROPOSITION 5.** Soit  $x$  une matrice de  $G(\mathbf{A}_k)$ ,  $\varphi$  une fonction de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$ ,  $\omega$  un quasi-caractère de  $\mathbf{A}_k^\times$  (i.e. un morphisme continu de  $\mathbf{A}_k^\times$  dans  $\mathbf{C}^\times$  trivial sur  $k^\times$ ),  $\sigma$  l'unique réel tel que

$$|\omega| = \omega_\sigma \quad \text{où} \quad \omega_\sigma(t) = |t|_{\mathbf{A}_k}^\sigma;$$

alors l'intégrale

$$M(\varphi, x, \omega) = \int_{\mathbf{A}_k^\times} \varphi(\text{et } x)\omega(\det tx)d\mu(t)$$

converge pour  $\sigma$  réel plus grand que  $1/n$ .

*Démonstration.* On peut supposer que la matrice  $x$  est la matrice unité et que la fonction  $\varphi$  est décomposable:

$$\varphi = \prod_v \varphi_v, \quad \varphi_v \in \mathcal{S}(V(k_v))$$

et  $\varphi_v$  est la fonction caractéristique de  $r_v^n$  pour presque toute place finie  $v$ . Soit  $K_v$  le support de la fonction  $\varphi_v$ , il existe un entier  $c_v$  tel que

$$K_v \subset \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n,$$

où  $r_v^n$  désigne le  $r_v$ -module engendré dans  $V(k_v)$  par la base canonique. Soit  $\sigma_v$  la fonction caractéristique de  $\pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$  et  $M_v$  le réel positif défini par

$$M_v = \sup_{x \in V(k_v)} |\varphi_v(x)|;$$

on a l'égalité suivante:

$$|\varphi_v(x)| \leq M_v \cdot \sigma_v(x).$$

D'autre part

$$\int_{k_v^\times} \sigma_v(et_v) \cdot |t_v|_v^{n\sigma} d\mu_v(t_v) = \int_{|t_v|_v \leq |\pi_v|_v^{-c_v}} |t_v|_v^{n\sigma} d\mu_v(t_v),$$

car

$$et_v = (0, \dots, 0, t_v) \in \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$$

si et seulement si

$$|t_v|_v \leq |\pi_v|_v^{-c_v}.$$

Mais

$$\int_{|t_v|_v \leq |\pi_v|_v^{-c_v}} |t_v|_v^{n\sigma} d\mu_v(t_v) = \sum_{r_v = -c_v}^{\infty} \int_{|t_v|_v = |\pi_v|_v^{r_v}} |\pi_v|_v^{r_v n\sigma} d\mu_v(t_v).$$

Posons  $q_v = |\pi_v|_v^{-1} > 1$ ; on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{r_v = -c_v}^{\infty} q_v^{-r_v n\sigma} \cdot \int_{|t_v|_v = 1} d\mu_v(t_v) &= m_v q_v^{c_v n\sigma} \cdot \sum_{r_v = 0}^{\infty} q_v^{-r_v n\sigma} \\ &= m_v q_v^{c_v n\sigma} (1 - q_v^{-n\sigma})^{-1} \quad \text{lorsque } \sigma > 0. \end{aligned}$$

Les réels  $M_v$  et  $m_v$  sont presque toujours égaux à 1 et l'entier  $c_v$  presque toujours nul, donc le produit des intégrales

$$\int_{k_v^\times} |\varphi_v(et_v)| \cdot |t_v|_v^{n\sigma} d\mu_v(t_v)$$

aux places finies est convergent lorsque le produit  $\prod_v (1 - q_v^{-n\sigma})^{-1}$  converge, c'est-à-dire quand  $n\sigma > 1$  ou encore  $\sigma > 1/n$ .

Aux places infinies l'intégrale converge si elle converge à l'origine autrement dit si  $\sigma > 0$ . La proposition 5 est démontrée.

Soit  $P$  le sous-groupe de  $G$  des matrices qui s'écrivent

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

où  $a$  est une matrice de  $GL_{n-1}$ ,  $b$  est un vecteur colonne ayant  $(n-1)$  composantes,  $d$  est un élément de l'anneau de base tel que  $d \cdot \det a$  soit inversible dans cet anneau; on définit les séries d'Eisenstein de la manière suivante :

PROPOSITION 6. Pour  $x \in G(\mathbf{A}_k)$ ,  $\omega$  un quasi-caractère de  $\mathbf{A}_k^\times$  tel que

$$|\omega| = \omega_\sigma, \quad \sigma \in \mathbf{R},$$

la série

$$E(\varphi, x, \omega) = \sum_{\gamma \in P(k) \backslash G(k)} M(\varphi, \gamma x, \omega)$$

converge pour  $\sigma > 1$ ; on l'appelle la série d'Eisenstein associée à la fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$ .

Énonçons d'abord le résultat suivant:

LEMME. L'intégrale

$$I_1 = \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} |t|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi tx)| d\mu(t)$$

est convergente si  $\sigma > 1$ .

*Démonstration.* Comme la fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$  est quelconque, on peut supposer  $x = 1$ .

A)  $k$  de caractéristique 0.

Soit  $P_\infty$  l'ensemble des places infinies de  $k$ , on pose:

$$\Omega(P_\infty) = \prod_{v \in P_\infty} k_v^\times \cdot \prod_{v \notin P_\infty} r_v^\times.$$

On sait que le groupe  $\Omega(P_\infty) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$  est fini, isomorphe au groupe  $C_k$  des classes d'idéaux de  $k$ . Soit  $Y$  un système de représentants dans  $\mathbf{A}_k^\times$  du quotient  $\Omega(P_\infty) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$ ; l'application canonique de  $Y \cdot \Omega(P_\infty)$  dans  $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$  est surjective.

Supposons qu'un élément  $\alpha$  de  $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$  s'écrive de deux manières distinctes:

$$\alpha = y_1 \omega_1 = y_2 \omega_2,$$

avec

$$y_1, y_2 \in Y \quad \text{et} \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega(P_\infty).$$

Alors il existe  $\alpha$  dans  $k^\times$  tel que

$$\alpha y_1 \omega_1 = y_2 \omega_2,$$

ce qui entraîne l'égalité de  $y_1$  et  $y_2$  car ce sont des représentants du quotient  $k^\times \cdot \Omega(P_\infty) \backslash \mathbf{A}_k^\times$ . Ainsi

c'est-à-dire  $\alpha \in r^\times$ ,  $r$  désignant l'anneau des entiers de  $k$ . On a donc un isomorphisme

$$Y \cdot r^\times \setminus \Omega(P_\infty) \rightarrow k^\times \setminus \mathbf{A}_k^\times.$$

L'intégrale  $I_1$  se réécrit

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{y \in Y} \int_{t \in r^\times \setminus \Omega(P_\infty)} |yt|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi yt)| d\mu(t) \\ &\leq \sum_{y \in Y} \int_{t \in \Omega(P_\infty)} |yt|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi yt)| d\mu(t). \end{aligned}$$

La fonction  $\varphi$  étant quelconque, on se borne à étudier la convergence de

$$\int_{t \in \Omega(P_\infty)} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi t)| \cdot |t|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} d\mu(t),$$

ou encore celle de

$$I_2 = \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \int_{t \in \Omega(P_\infty)} |\varphi(\xi t)| \cdot |t|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} d\mu(t),$$

ce qui se réécrit

$$(1) \quad I_2 = \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \left[ \prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \cdot \prod_{v \notin P_\infty} J_v(\xi) \right],$$

avec

$$\begin{aligned} I_v(\xi) &= \int_{t_v \in k_v^\times} |\varphi_v(\xi t_v)| \cdot |t_v|_{k_v}^{n\sigma} d\mu_v(t_v), \\ J_v(\xi) &= \int_{t_v \in r_v^\times} |\varphi_v(\xi t_v)| \cdot d\mu_v(t_v), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |t_v|_{k_v} &= |t_v| & \text{si } k_v &= \mathbf{R}, \\ &= |t_v|^2 & \text{si } k_v &= \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration de la proposition 2, on note  $K_v$  le support de la fonction  $\varphi_v$ ,  $c_v$  l'entier tel que

$$K_v \subset \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n.$$

De plus, on note  $\sigma_v$  la fonction caractéristique de  $\pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$  et  $M_v$  le réel positif défini par

$$M_v = \sup_{x \in V(k_v)} |\varphi_v(x)|$$

(l'entier  $c_v$  est nul et le réel  $M_v$  vaut 1 pour presque toutes les places finies  $v$ ). Alors

$$(2) \quad \prod_{v \in P_\infty} J_v \leq \prod_{v \in P_\infty} M_v \int_{t_v \in r_v^\times} \sigma_v(\xi t_v) d\mu_v(t_v).$$

Donnons une condition sur  $\xi$  pour qu'en toute place finie  $v$ ,  $\xi t_v \in \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$ .

Soit  $f = \prod_{v \in P_\infty} |\pi_v|_v^{-c_v} \in \mathbf{N} \subset r$  ( $r$  anneaux des entiers de  $k$ ), alors

$$|f|_v = |\pi_v|_v^{c_v};$$

on a les équivalences successives suivantes:

$$\xi t_v \in \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n \Leftrightarrow |\xi|_v \leq |\pi_v|_v^{-c_v} \Leftrightarrow |\xi|_v \leq |f|_v^{-1} \Leftrightarrow |f\xi|_v \leq 1 \Leftrightarrow f\xi \in r_v^n;$$

et on en déduit que  $\xi t_v$  sera dans  $\pi_v^{-c_v} r_v^n$  pour tout  $v$  fini si et seulement si  $\xi \in f^{-1} r^n$ . Si  $\xi \notin f^{-1} r^n$ , l'une au moins des intégrales  $J_v(\xi)$  est nulle et il suffit donc, dans la définition de  $I_2$ , de sommer sur les  $\xi \in f^{-1} r^n$ . On en déduit alors de (1) et (2) la majoration

$$I_2 \leq \sum_{\xi \in f^{-1} r^n} \left( \prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \cdot \prod_{v \in P_\infty} M_v \int_{t_v \in r_v^\times} d\mu_v(t_v) \right),$$

puis

$$I_2 \leq \left( \prod_{v \in P_\infty} M_v \cdot m_v \right) \sum_{\xi \in f^{-1} r^n} \left[ \prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \right],$$

où  $m_v$  est le réel positif défini en III.1.

Mais les fonctions  $\varphi_v$  où  $v$  est une place infinie sont à décroissance rapide donc:

$$\prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \leq \prod_{v \in P_\infty} C_{v,N} \int_{t_v \in k_v^\times} (1 + \|\xi t_v\|)^{-N} \cdot |t_v|^{\alpha n \sigma} d\mu_v(t_v),$$

où  $\alpha = 1$  si  $k_v = \mathbf{R}$ ,  $\alpha = 2$  si  $k_v = \mathbf{C}$ .

On fait le changement de variables suivant:

si  $v$  est une place réelle:  $u_v = \|\xi\| \cdot t_v$ ,

si  $v$  est une place complexe:  $u_v = \|\xi\|^{\frac{1}{2}} \cdot t_v$ ,

alors  $|u_v|_{k_v} = \|\xi\| \cdot |t_v|_{k_v}$  de sorte que

$$\prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \leq \|\xi\|^{-n\sigma d} \prod_{v \in P_\infty} C_{v,N} \int_{u_v \in k_v^\times} (1 + |u_v|_{k_v})^{-N} \cdot |u_v|_{k_v}^{n\sigma} d\mu_v(u_v),$$

où  $d$  désigne la dimension de  $k$  sur  $\mathbf{Q}$ .

— Si  $k_v = \mathbf{R}$ , l'intégrale correspondante dans le produit se réécrit:

$$\int_{t \in \mathbf{R}^\times} (1 + |t|)^{-N} \cdot |t|^{n\sigma} \frac{dt}{|t|}$$

intégrale qui converge à l'infini si  $N$  est choisi assez grand et en 0 si  $\sigma > 0$ .

— Si  $k_v = \mathbf{C}$ , l'intégrale se réécrit:

$$\begin{aligned} 2 \int_{z \in \mathbf{C}^\times} (1 + |z|^2)^{-N} \cdot |z|^{2n\sigma-2} dx dy &= 2 \int_\rho \int_\theta (1 + \rho^2)^{-N} \cdot \rho^{2n\sigma-1} d\rho d\theta \\ &= 4\pi \int_\rho (1 + \rho^2)^{-N} \cdot \rho^{2n\sigma-1} d\rho, \end{aligned}$$

intégrale qui converge à l'infini si  $N$  est choisi assez grand et en 0 si  $2n\sigma - 1 > -1$  c'est-à-dire si  $\sigma > 0$ .

Il reste à montrer la convergence de la série

$$\sum_{\xi \in f^{-1}\mathfrak{r}^n} \|\xi\|^{-n\sigma d} = \sum_{\xi \in \mathfrak{r}^n} \|f^{-1}\xi\|^{-n\sigma d} = |f|^{n\sigma d} \cdot \sum_{\xi \in \mathfrak{r}^n} \|\xi\|^{-n\sigma d};$$

on est donc ramené à la convergence de

$$\sum_{\xi \in \mathfrak{r}^n} \|\xi\|^{-n\sigma d}.$$

Si la norme utilisée est la norme définie par

$$\|\xi\| = \sup_i |\xi_i| \quad \text{pour} \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n),$$

on obtient les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in \mathfrak{r}^n} \|\xi\|^{-n\sigma d} &= \sum_{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathfrak{r}^n} \sup_i |\xi_i|^{-n\sigma d} \\ &= \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \sup_i |z_1^i \omega_1 + \dots + z_d^i \omega_d|^{-n\sigma d}, \end{aligned}$$



avec  $z = (z_1^1, \dots, z_d^1, \dots, z_1^n, \dots, z_d^n)$ , et  $(\omega_1, \dots, \omega_d)$  est une base fondamentale du  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $k$ . Ainsi

$$\sum_{\xi \in \mathbf{r}^n} \|\xi\|^{-n\sigma d} \leq |\omega_{i_0}|^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \sup_i |z_1^i + \dots + z_d^i|^{-n\sigma d},$$

où  $\omega_{i_0}$  est un élément de la base fondamentale tel que

$$|\omega_{i_0}| = \sup_{i=1 \text{ à } n} |\omega_i|.$$

On a encore les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in \mathbf{r}^n} \|\xi\|^{-n\sigma d} &\leq |\omega_{i_0}|^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} d^{-n\sigma d} \sup_i \sup_j |z_j^i|^{-n\sigma d} \\ &= |d\omega_{i_0}|^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \sup_{i,j} |z_j^i|^{-n\sigma d} \\ &= |d\omega_{i_0}|^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \|z\|^{-n\sigma d}. \end{aligned}$$

On sait que la série  $\sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \|z\|^{-n\sigma d}$  converge pour  $\sigma > 1$ .

### B) $k$ de caractéristique $p$

On suppose que  $k$  est une extension algébrique de dimension finie du corps  $\mathbf{F}_p(T)$ . Pour chaque place  $v$  de  $k$ ,  $k_v$  est de caractéristique  $p$  et si  $x$  est un élément de  $k_v^\times$ , le nombre  $|x|_v$  est dans le sous-groupe  $\Gamma_0$  de  $\mathbf{R}_+^\times$  engendré par  $p$ . La même chose est vraie pour le module  $|z|_{\mathbf{A}_k}$  où  $z$  est un élément de  $\mathbf{A}_k^\times$ . L'image de  $\mathbf{A}_k^\times$  par le morphisme  $z \mapsto |z|_{\mathbf{A}_k}$  est un sous-groupe non trivial du groupe  $\Gamma_0$ . Supposons qu'il soit engendré par un entier  $Q = p^N$  avec  $N$  entier  $\geq 1$ .

Choisissons  $z_1$  dans  $\mathbf{A}_k$  tel que:  $|z_1|_{\mathbf{A}_k} = Q$ . Alors  $\mathbf{A}_k^\times$  est le produit direct de  $\mathbf{A}_k^1$  et du sous-groupe noté  $\Gamma$  engendré par  $z_1$  évidemment isomorphe à  $\mathbf{Z}$ . D'autre part, on pose

$$\Omega(\phi) = \prod_v r_v^\times,$$

on sait que le groupe quotient  $\Omega(\phi) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1$  est fini. C'est le groupe isomorphe au groupe des classes de diviseurs de degré 0. (Voir [6], p. 97).

Soit  $Y$  un système de représentants dans  $\mathbf{A}_k^1$  de ce quotient; l'application canonique de  $\Gamma \cdot Y$  dans  $\Omega(\phi) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$  est bijective et on a également un isomorphisme

$$k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times \rightarrow \Gamma \cdot Y(\Omega(\phi) \cap k^\times \backslash \Omega(\phi))$$

ou encore

$$k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times \rightarrow \Gamma \cdot Y(\mathbf{F}_q \backslash \Omega(\phi)),$$

où  $\mathbf{F}_q$  est le corps des constantes de  $k$  c'est-à-dire le corps fini maximal contenu dans  $k$ . Ainsi l'intégrale  $I_1$  se réécrit

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{y \in Y} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{t \in \mathbf{F}_q \backslash \Omega(\phi)} |z_1^m|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi z_1^m y t)| d\mu(t) \\ &\leq \sum_{y \in Y} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{t \in \Omega(\phi)} |z_1^m|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi z_1^m y t)| d\mu(t). \end{aligned}$$

La fonction  $\varphi$  étant quelconque, on se borne à étudier la convergence de

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{t \in \Omega(\phi)} |z_1^m|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi z_1^m t)| d\mu(t),$$

ou encore celle de

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{m \in \mathbf{Z}} |z_1|_{\mathbf{A}_k}^{mn\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \int_{t \in \Omega(\phi)} |\varphi(\xi z_1^m t)| d\mu(t) \\ &= \sum_{m \in \mathbf{Z}} |z_1|_{\mathbf{A}_k}^{mn\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \prod_v \int_{t_v \in r_v^\times} |\varphi_v(\xi z_{1,v}^m t_v)| d\mu_v(t_v), \end{aligned}$$

où  $z_{1,v}$  désigne la composante en la place  $v$  de l'idèle  $z_1$ .

Déterminons un idèle  $z_1$  particulier; on le choisit tel que:  $z_1 = (z_{1,v})_v$  avec  $z_{1,v} = 1$  pour  $v \neq v_0$ ,  $z_{1,v_0} = \pi_{v_0}$ ,  $v_0$  étant une place quelconque de  $k$ .

Alors l'intégrale  $I_2$  se réécrit:

$$I_2 = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \left( |\pi_{v_0}|^{mn\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \left[ \prod_{v \neq v_0} J_v(\xi) \cdot \int_{t_{v_0} \in r_{v_0}^\times} |\varphi_{v_0}(\xi t_{v_0} \pi_{v_0}^m)| d\mu_{v_0}(t_{v_0}) \right] \right),$$

où comme précédemment  $J_v(\xi)$  désigne l'intégrale

$$J_v(\xi) = \int_{t_v \in r_v^\times} |\varphi_v(\xi t_v)| \cdot d\mu_v(t_v).$$

On suppose toujours que  $\varphi = \prod \varphi_v$  est une fonction décomposable de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$  et que, pour toute place  $v$ ,  $|\varphi_v| \leq M_v \sigma_v$ , où  $\sigma_v$  est la fonction caractéristique de  $\pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$ . Pour que le produit contenu dans l'expression  $I_2$  soit non nul, il faut que l'élément  $\xi$  de  $V(k) - \{0\}$  vérifie les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \|\xi\|_v &\leq |\pi_v^{-c_v}|_v \quad \text{pour } v \neq v_0, \\ \|\xi\|_{v_0} &\leq |\pi_{v_0}^{-c_{v_0}-m}|_{v_0}. \end{aligned}$$

Posons

$$L_v = p_v^{-c_v}, \quad L_{v_0, m} = p_{v_0}^{-(c_{v_0}+m)}, \quad \text{et } L_m = (L_v)_v;$$

alors  $L_m$  est un système cohérent de  $k_v$ -réseaux de rang 1. (Voir [6], p. 97).

Soit  $\Lambda(L_m) = k \cap (\prod_v L_v)$ ,  $\Lambda(L_m)$  est un espace vectoriel sur le corps  $F_q$  des constantes de  $k$  dont on note sa dimension  $\lambda(L_m)$ . (Voir [6], p. 97). Le produit contenu dans  $I_2$  est non nul (pour  $m$  fixé) si et seulement si  $\xi \in \Lambda(L_m)$ .

D'autre part, soit  $a_m$  le diviseur associé au système  $L_m$ :

$$a_m = \sum_{v \neq v_0} c_v v + (c_{v_0} + m)v_0;$$

on sait que si son degré

$$\deg a_m = \sum_{v \neq v_0} c_v \deg v + (c_{v_0} + m) \deg v_0$$

est strictement négatif, c'est-à-dire si

$$m < -c_{v_0} - (\deg v_0)^{-1} \cdot \sum_{v \neq v_0} c_v \deg v = M,$$

alors  $\lambda(L_m) = 0$  (voir [6], p. 100).

Il suffit donc dans l'expression  $I_2$  de sommer pour  $m \geq M$  de sorte que

$$I_2 \leq \left( \prod_v M_v m_v \right) \sum_{m \geq M} |\pi_{v_0}|^{mn\sigma} \cdot \sum_{\xi \in \Lambda(L_m)^n - \{0\}} (1). \quad (1)$$

On doit étudier la convergence de

$$\sum_{m \geq M} |\pi_{v_0}|^{mn\sigma} (q^{n\lambda(L_m)} - 1).$$

Sachant que pour  $m$  assez grand, le théorème de Riemann-Roch donne l'égalité

$$\lambda(L_m) = \deg a_m - g + 1,$$

où  $g$  est le genre de  $k$  (voir [6], Cor. 2 du Théorème 2, p. 101), on est ramené à la convergence de

$$\sum_{m \geq M} q^{-mn\sigma \deg v_0} q^{nm \deg v_0} = \sum_{m \geq M} q^{\deg v_0(1-\sigma)mn}.$$

Cette série converge pour  $\sigma > 1$ .

Le résultat de la proposition 6 se déduit alors de :

PROPOSITION 7. *On a l'égalité*

$$E(\varphi, x, \omega) = \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi tx) d\mu(t)$$

pour  $\omega$  quasi-caractère d'exposant  $\sigma > 1$ .

*Démonstration.* On construit l'application suivante :

$$\begin{aligned} P(k) \backslash G(k) \times k^\times &\rightarrow V(k) - \{0\} \\ (\gamma, u) &\mapsto eu \gamma_0 \end{aligned}$$

où  $\gamma_0$  est une matrice dans la classe de  $\gamma$  dont le premier élément non nul sur la dernière ligne est égal à 1.

Puisque cette application est bijective, on peut écrire la série absolument convergente  $\sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi tx)$  comme

$$\sum_{u \in k^\times} \sum_{\gamma \in P(k) \backslash G(k)} \varphi(eu \gamma_0 tx),$$

et par suite

$$\begin{aligned} &\int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi tx) d\mu(t) \\ &= \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \sum_{u \in k^\times} \sum_{\gamma \in P(k) \backslash G(k)} \omega(\det tx) \varphi(eu \gamma_0 tx) d\mu(t) \\ &= \int_{\mathbf{A}_k^\times} \sum_{\gamma \in P(k) \backslash G(k)} \omega(\det tx) \varphi(et \gamma_0 x) d\mu(t) \\ &= \sum_{\gamma \in P(k) \backslash G(k)} \int_{\mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \varphi(et \gamma_0 x) d\mu(t) \end{aligned}$$

puisqu'on a ici convergence absolue. Mais l'intégrale

$$M(\varphi, \gamma_0 x, \omega) = \int_{\mathbf{A}_k^\times} \varphi(et \gamma_0 x) \omega(\det tx) d\mu(t)$$

ne dépend pas du représentant choisi dans la classe  $\gamma$  de  $P(k) \backslash G(k)$ , ainsi on a bien

$$\begin{aligned}
& \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi tx) d\mu(t) \\
&= \sum_{\gamma \in P(k) \backslash G(k)} \int_{\mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \varphi(\gamma x) d\mu(t) \\
&= E(\varphi, x, \omega).
\end{aligned}$$

### Chapitre IV

#### LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES SÉRIES D'EISENSTEIN

Dans la suite,  $k$  désigne un corps global,  $E$  une extension de dimension  $n$  sur  $k$  et  $V(k)$  l'espace vectoriel sur  $k$  sous-jacent à  $E$ .

##### 1. LA FORMULE DE POISSON

Soit  $\chi$  un caractère de  $\mathbf{A}_k$  non trivial, trivial sur  $k$  et soit  $(x, y)$  la formule bilinéaire symétrique sur  $V(\mathbf{A}_k)$  non dégénérée définie par

$$(x, y) = \text{Tr}(xy),$$

où  $\text{Tr}$  désigne la trace absolue  $\text{Tr}_{E/k}$ ; alors on peut identifier  $V(\mathbf{A}_k)$  avec son dual topologique par l'isomorphisme qui à un élément  $x$  de  $V(\mathbf{A}_k)$  associe le caractère  $\chi(x, y)$  de  $V(\mathbf{A}_k)$ .

Soit  $\alpha$  la mesure de Tamagawa de  $\mathbf{A}_E$  pour laquelle le quotient  $E \backslash \mathbf{A}_E$  est de mesure 1, avec l'identification précédente; la transformée de Fourier d'une fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$  est définie par

$$\hat{\varphi}(y) = \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(x) \overline{\chi(x, y)} d\alpha(x), \quad \text{pour } y \in V(\mathbf{A}_k),$$

et la formule de Poisson pour le sous-groupe discret à quotient compact  $V(k)$  dans  $V(\mathbf{A}_k)$  s'écrit

$$\sum_{x \in V(k)} \varphi(x) = \sum_{y \in V(k)} \hat{\varphi}(y) \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k)),$$

l'orthogonal de  $V(k)$  s'identifiant à  $V(k)$ .