1. La formule de Poisson

$$\int_{k^\times\backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx)\cdot \sum_{\xi\in V(k)-\{0\}} \varphi(\xi tx)d\mu(t)$$

$$= \sum_{\gamma\in P(k)\backslash G(k)} \int_{\mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx)\ \varphi(\mathrm{et}\ \gamma x)d\mu(t)$$

$$= E(\varphi, x, \omega)\,.$$

Chapitre IV

Le prolongement analytique des séries d'Eisenstein

Dans la suite, k désigne un corps global, E une extension de dimension n sur k et $V(k)$ l'espace vectoriel sur k sous-jacent à E.

1. La formule de Poisson

Soit χ un caractère de $\mathbf{A}_k$ non trivial, trivial sur k et soit (x, y) la formule bilinéaire symétrique sur $V(\mathbf{A}_k)$ non dégénérée définie par

$$(x, y) = Tr(xy)\,,$$

où Tr désigne la trace absolue $Tr_{E/k}$; alors on peut identifier $V(\mathbf{A}_k)$ avec son dual topologique par l'isomorphisme qui a un élément x de $V(\mathbf{A}_k)$ associe le caractère $\chi(x, y)$ de $V(\mathbf{A}_k)$.

Soit α la mesure de Tamagawa de $\mathbf{A}_E$ pour laquelle le quotient $E\backslash\mathbf{A}_E$ est de mesure 1, avec l'identification précédente; la transformée de Fourier d'une fonction φ de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ est définie par

$$\hat{\varphi}(y) = \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(x)\,\overline{\chi(x, y)}\,d\alpha(x), \qquad \text{pour} \qquad y\in V(\mathbf{A}_k)\,,$$

et la formule de Poisson pour le sous-groupe discret à quotient compact $V(k)$ dans $V(\mathbf{A}_k)$ s'écrit

$$\sum_{x\in V(k)} \varphi(x) = \sum_{y\in V(k)} \hat{\varphi}(y) \qquad \text{pour} \qquad \varphi\in\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))\,,$$

l'orthogonal de $V(k)$ s'identifiant à $V(k)$.

PROPOSITION 8. *Soit* φ *une fonction de* $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$; *on pose*

$$\theta(\varphi, x, t) = \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi t x)$$

pour $x \in G(\mathbf{A}_k)$ et $t \in \mathbf{A}_k^\times$; alors

$$\theta(\varphi, x, t) + \varphi(0) = |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \left(\theta(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, t^{-1}) + \hat{\varphi}(0)\right),$$

où $\check{x}$ désigne la matrice adjointe de la matrice x pour la forme bilinéaire (a, b):

$$(ax, b) = (a, b, \check{x}), \qquad a, b \in V(\mathbf{A}_k).$$

Démonstration. On pose

$$\psi(\xi) = \varphi(\xi t x) \quad \text{pour} \quad \xi \in V(\mathbf{A}_k);$$

alors
$$\hat{\psi}(\eta) = \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(\xi t x) \overline{\chi(\xi, \eta)}\, d\alpha(\xi).$$

Si on fait le changement de variables $\xi \mapsto s = \xi t$, on obtient

$$\hat{\psi}(\eta) = |t|_{\mathbf{A}_k}^{-n} \cdot \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(sx) \overline{\chi(st^{-1}, \eta)}\, d\alpha(s).$$

Posons encore $z = sx$; alors

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\eta) &= |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \cdot \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(z) \overline{\chi(zx^{-1}t^{-1}, \eta)}\, d\alpha(z) \\
&= |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \cdot \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(z) \overline{\chi(z, \eta t^{-1} \check{x}^{-1})}\, d\alpha(z) \\
&= |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \cdot \hat{\varphi}(\eta t^{-1} \check{x}^{-1}).
\end{aligned}$$

Appliquons la formule de Poisson; on obtient l'équivalence des égalités suivantes:

$$\sum_{\xi \in V(k)} \psi(\xi) = \sum_{\eta \in V(k)} \hat{\psi}(\eta),$$

$$\theta(\varphi, x, t) + \varphi(0) = |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \cdot \sum_{\eta \in V(k)} \hat{\varphi}(\eta t^{-1} \check{x}^{-1}),$$

$$\theta(\varphi, x, t) + \varphi(0) = |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \left(\theta(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, t^{-1}) + \hat{\varphi}(0)\right).$$