2. La formule intégrale de Hecke

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

2. La formule intégrale de Hecke

On suppose toujours que E un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$. En choisissant pour g la matrice identité, la formule adélique donnée dans le théorème 1 du chapitre précédent devient

$$\int_{T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})} E(\varphi, x, \omega)\, d\mu_{Z\backslash T}(x) = \zeta(\varphi, \omega\circ N_{E/\mathbf{Q}})\,.$$

On définit le quasi-caractère ω de $\mathbf{A}^\times/\mathbf{Q}^\times$ de la manière suivante:

$$\omega(t) = |\, t\,|_{\mathbf{A}}^{s}\,, \qquad t \in \mathbf{A}^\times\,,$$

avec $s \in \mathbf{C}$ et $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$.

Ainsi

$$\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}(t) = |\, t\,|_{\mathbf{A}_E}^{s}\,, \qquad t \in \mathbf{A}_E^\times\,.$$

On définit la fonction φ de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}))$ par

$$\varphi = \prod \varphi_p$$

avec, pour les *places finies*,

$$\varphi_p(t_p) = \chi_{L_p}(t_p)\,, \qquad t_p \in E \otimes \mathbf{Q}_p\,,$$

où χ_{L_p} est la fonction caractéristique du réseau L_p engendré dans $E \otimes \mathbf{Q}_p$ par la base fondamentale $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de E sur $\mathbf{Q}$.

On note μ_p comme au chapitre II, l'isomorphisme de $E \otimes \mathbf{Q}_p$ sur $\prod_{\mathfrak{p}|p} E$; le réseau L_p étant engendré par une base fondamentale, on a

$$\mu_p(L_p) = \prod_{\mathfrak{p}|p} r_{\mathfrak{p}}\,,$$

de sorte que

$$\varphi_p \circ \mu_p^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}|p} \chi r_{\mathfrak{p}}\,.$$

Pour la place *infinie*, on pose

$$\varphi_\infty(t) = e^{-\pi F(t)}\,, \qquad t \in E \otimes \mathbf{R}\,,$$

avec la fonction F définie par

$$F(t) = \sum_{i=1}^{r_1} \sigma_i(t)^2 + 2 \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} |\, \sigma_i(t)\,|^2\,,$$

où $(\sigma_i)_{1\leqslant i\leqslant r_1}$ désignent les r_1 plongements de E dans $\mathbf{R}$, $(\sigma_i)_{r_1+1\leqslant i\leqslant r_1+r_2}$

les r_2 plongements de E dans $\mathbf{C}$ non conjugués deux à deux et

$$\sigma_{r_1+r_2+i} = \overline{\sigma_{r_1+i}} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r_2 .$$

La fonction F peut également s'exprimer pour un élément $t = t_1\omega_1 + \ldots + t_n\omega_n$ de $E \otimes \mathbf{R}$ de la manière suivante:

$$F(t_1\omega_1 + \ldots + t_n\omega_n) = \sum_{i=1}^{r_1} (t_1\omega_1^{(i)} + \ldots + t_n\omega_n^{(i)})^2$$

$$+ 2 \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} | t_1\omega_1^{(i)} + \ldots + t_n\omega_n^{(i)} |^2 = (t_1, \ldots, t_n)\Delta \cdot {}^t\overline{\Delta} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} ,$$

où on a noté $\omega_j^{(i)} = \sigma_i(\omega_j)$ et Δ la matrice

$$\begin{pmatrix} \omega_1^{(1)} & \cdots & \omega_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_n^{(1)} & \cdots & \omega_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Enfin, on note comme au chapitre V:

μ_E la mesure de Haar sur $\mathbf{A}_E^\times$ obtenue en prenant $\mu_E = \prod \mu_{\mathfrak{p}}$ avec $\mu_{\mathfrak{p}}(r_{\mathfrak{p}}^\times) = 1$ pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de E, $d\mu_{\mathfrak{p}}(x) = \dfrac{dx}{|x|}$ pour les places réelles de E et $d\mu_{\mathfrak{p}}(x) = |x|^{-2} \cdot | dx \wedge d\bar{x} |$ pour les places complexes de E,

μ_T la mesure de Haar sur $T(\mathbf{A})$ et $T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})$,

μ la mesure de Haar sur $\mathbf{A}^\times$, $\mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times$ et $Z(\mathbf{Q})\backslash Z(\mathbf{A})$,

$\mu_{Z\backslash T}$ la mesure de Haar sur $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$.

A) *Calcul de* $\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}})$

Pour $\sigma > 1$, on a les égalités suivantes:

$$\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}) = \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(t) \cdot |t|_{\mathbf{A}_E}^s \, d\mu_E(t) = \prod_{\mathfrak{p}} \int_{E_{\mathfrak{p}}^\times} \varphi_{\mathfrak{p}} | t_{\mathfrak{p}} | \cdot | t_{\mathfrak{p}} |^s \, d\mu_{\mathfrak{p}}(t_{\mathfrak{p}})$$

(cf. [6], Prop. 10, p. 119).

Alors en utilisant [6], Prop. 11, p. 120 et lemme 8, p. 127, on obtien

$$\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}) = \pi^{-r_1 s/2} \, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} (2\pi)^{r_2(1-2)} \Gamma(s)^{r_2} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \text{ fini}} (1 - |\pi_{\mathfrak{p}}|^s)^{-1} ,$$

où $\pi_{\mathfrak{p}}$ désigne une uniformisante de $E_{\mathfrak{p}}$. Notons

$$G_\infty(s) = \pi^{-r_1 s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\cdot(2\pi)^{r_2(1-s)}\cdot\Gamma(s)^{r_2};$$

alors

$$\zeta(\varphi, \omega\circ N_{E/\mathbf{Q}}) = G_\infty(s)\cdot\zeta_E(s),$$

où ζ_E désigne la fonction zeta de Dedekind de l'extension E.

B) *Calcul de l'intégrale toroïdale*

Dans la suite, on notera I l'intégrale toroïdale:

$$I = \int_{T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})} E(\varphi, x, \omega)\,d\mu_{Z\backslash T}(x).$$

On a vu que l'image par π_1 du quotient $\big(T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})\big)$ est

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$$

Mais ce groupe est isomorphe au quotient suivant:

$$\big(T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})\big)/\big(T(\hat{\mathbf{Z}})/Z(\hat{\mathbf{Z}})\big)$$

Lemme. *Soit* ξ *un élément de* $G(\hat{\mathbf{Z}})$; *alors*

$$E(\varphi, x\xi, \omega) = E(\varphi, x, \omega).$$

Démonstration. On a

$$E(\varphi, x, \omega) = \sum_{\gamma\in P(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{Q})} M(\varphi, \gamma x, \omega)$$

et

$$M(\varphi, x, \omega) = |\det x|_{\mathbf{A}}^{s}\cdot\int_{\mathbf{A}^\times}\varphi(et\,x)\cdot|t|_{\mathbf{A}}^{ns}\,d\mu(t).$$

Il suffit de montrer

$$M(\varphi, x, \omega) = M(\varphi, x\xi, \omega).$$

Mais $\xi\in G(\hat{\mathbf{Z}})$ donc $|\det\xi|_{\mathbf{A}} = 1$; de plus en chaque place finie p, $\xi_p\in G(\mathbf{Z}_p)$ donc $et_p x_p\in L_p$ si et seulement si $et_p x_p\xi_p\in L_p$, ce qui prouve le lemme.

Le groupe $T(\hat{\mathbf{Z}})/Z(\hat{\mathbf{Z}})$ étant compact, on choisit une mesure de Haar sur celui-ci de manière à ce qu'il soit de mesure 1. Si on prend sur le groupe $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ la mesure quotient notée $\dot{\mu}_{Z\backslash T}$, on obtient comme nouvelle expression de l'intégrale I

$$I = \int_{Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})} E(\varphi, x, \omega)\, d\dot{\mu}_{Z\backslash T}(x)\,,$$

puisque la série E est invariante par l'action de $T(\hat{\mathbf{Z}})$.
On a vu que le quotient $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ s'écrit comme une réunion disjointe

$$\bigcup_{j=1}^{h} H_j(Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R}))\,.$$

Notons μ_{T_∞} la mesure induite par $\mu_{Z\backslash T}$ sur le quotient $Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R})$; alors

$$I = \int_{Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R})} \sum_{j=1}^{h} E(\varphi, H_j x, \omega) d\mu_{T_\infty}(x)\,.$$

Pour chaque indice j de 1 à h, les matrices H_j et $(h_j, 1, ..., 1, ...) = (P_j^{-1}, 1, ..., 1, ...)$ sont dans une même classe de $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$. (Cf. la remarque au-dessus de la proposition 11).

Comme les séries E sont invariantes par l'action de $G(\mathbf{Q})$ à gauche et de $G(\hat{\mathbf{Z}})$ à droite, on obtient

$$I = \int_{Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R})} \sum_{j=1}^{h} E(\varphi, h_j x, \omega) d\mu_{T_\infty}(x)\,.$$

On calcule à présent les séries $E(\varphi, x, \omega)$ dans le cas particulier où $x = (x_\infty, 1, ..., 1)$. Alors

$$\begin{aligned} E(\varphi_1(x_\infty, 1, ..., 1, ...), \omega) &= |\det x_\infty|^s \cdot \int_{\mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times} |t|_{\mathbf{A}}^{ns} \cdot \sum_{\xi\in V(\mathbf{Q})-\{0\}} \varphi(\xi t x) d\mu(t) \\ &= |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi\in V(\mathbf{Q})-\{0\}} \int_{\mathbf{R}_+^\times\cdot\prod_p \mathbf{Z}_p^\times} |t|_{\mathbf{A}}^{ns} \cdot \varphi(\xi t x) d\mu(t) \\ &= |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi\in V(\mathbf{Q})-\{0\}} \left(\int_0^{+\infty} t^{ns}\varphi_\infty(\xi t x_\infty)\frac{dt}{t}\cdot\prod_p \int_{\mathbf{Z}_p^\times} \varphi_p(\xi t) d\mu_p(t)\right). \end{aligned}$$

Soit ξ un élément de $V(\mathbf{Q}) - \{0\}$, de coordonnées $(\xi_1, ..., \xi_n)$; alors l'intégrale $\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \varphi_p(\xi t) d\mu_p(t)$ est non nulle lorsque

$$\mathrm{Max}(|\xi_1|_p, ..., |\xi_n|_p) \leqslant 1\,.$$

Pour que le produit sur l'ensemble des nombres premiers des intégrales précédentes soit non nul, il faut donc choisir ξ de coordonnées $(\xi_i)_{1 \text{ à } n}$ vérifiant :

$$\xi_i \in \bigcap_p (\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}_p) ;$$

donc ξ_i doit être un élément de $\mathbf{Z}$. Par conséquent

$$E(\varphi, (x_\infty, 1, ..., 1, ...), \omega) = |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot \varphi_\infty(\xi t x_\infty) dt .$$

D'autre part on a

$$\int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot \varphi_\infty(\xi t x_\infty) dt = \int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot e^{-\pi t^2 F(\xi x_\infty)} dt .$$

Faisons le changement de variables

$$u = \pi t^2 \cdot F(\xi x_\infty);$$

l'intégrale ci-dessus devient

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot F(\xi x_\infty)^{-\frac{ns}{2}}$$

et puisque

$$F(t_1 \omega_1 + ... + t_n \omega_n) = (t_1, ..., t_n) \Delta \cdot {}^t\overline{\Delta} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix},$$

on a

(*)
$$E(\varphi, (x_\infty, 1, ..., 1, ...), \omega)$$
$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{q \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} (q x_\infty \Delta \cdot {}^t\overline{\Delta} {}^t\bar{x}_\infty {}^t q)^{-\frac{ns}{2}} .$$

Dans le cas qui nous intéresse, les matrices x_∞ ont pour valeurs

$$x_\infty = P_j^{-1} x , \quad x \in Z(\mathbf{R}) T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R}) .$$

On rappelle que l'on a un isomorphisme

$$\pi : (E \otimes \mathbf{R})^\times \to T(\mathbf{R})$$
$$y \mapsto \pi(y) .$$

De plus, on vérifie facilement que l'on a le

LEMME. *Soit* y *un élément de* $(E \otimes \mathbf{R})^{\times}$;

$$\pi(y) = \Delta D(y) \Delta^{-1},$$

où $D(y)$ *est la matrice diagonale* $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$.

Soit ν l'isomorphisme défini au chapitre II, en prenant pour v la place infinie, on voit que ν applique $T(\mathbf{R})$ sur $(\mathbf{R}^{+})^{r_1} \times (\mathbf{C}^{\times})^{r_2}$ et que

$$\nu \circ \pi(y) = (y^{(1)}, \ldots, y^{(r_1+r_2)}).$$

Pour $y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(r_1+r_2)})$ un élément de $(\mathbf{R}^{\times})^{r_1} \times (\mathbf{C}^{\times})^{r_2}$, on note

$$Ny = \prod_{i=1}^{r_1+r_2} |\, y_i \,|^{e_i} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{y} = \prod_{i=1}^{r_1+r_2} \frac{dy_i}{|\, y_i \,|^{e_i}},$$

avec

$$e_i = 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r_1$$

et

$$e_i = 2 \quad \text{pour} \quad r_1 + 1 \leqslant i \leqslant r_1 + r_2 .$$

Définition 2. Soit P une matrice d'ordre n réelle, symétrique, définie positive; on définit la série d'Epstein $Z(P, s)$ où s est un nombre complexe vérifiant $\operatorname{Re} s > \frac{n}{2}$:

$$Z(P, s) = \frac{1}{2} \sum_{q \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} (q\, P\, {}^t q)^{-s} .$$

Avec cette définition et en utilisant la relation (*), l'intégrale I se réécrit à présent

$$I = \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot J ,$$

où J est définie par

$$J = \sum_{j=1}^{h} \int_{y=(y_1,\ldots,y_{r_1+r_2}) \in \mathscr{D}} (Ny)^s \cdot Z\left(P_j^{-1} \Delta D(y)\, \overline{D(y)}\, {}^t\overline{\Delta}\, {}^t\overline{P_j^{-1}}, \frac{ns}{2}\right) \frac{dy}{y}$$

et $\mathscr{D}$ est un domaine fondamental dans $(\mathbf{R}^{\times})^{r_1} \times (\mathbf{C}^{\times})^{r_2}$ correspondant par l'isomorphisme ν à un domaine fondamental de $Z(\mathbf{R}) T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R})$.

Posons comme nouvelles variables

$$\tau_1 = |\, y_1 \,|^2 ; \ldots ; \tau_{r_1+r_2} = |\, y_{r_1+r_2} \,|^2$$

et pour toute matrice P de $G(\mathbf{R})$, écrivons

$$P^0 = (\det P)^{-1/n} \cdot P\ ;$$

il vient

$$J = 2^{r_1 - 1}(4\pi)^{r_1} \cdot 2^{-(r_1 + r_2)} \cdot |\, d_E \,|^{-s/2} \cdot K\,,$$

avec

$$K = \sum_{j=1}^{h} \int Z\left((P_j^0)^{-1} \Delta^0 D(\tau)\, {}^t\overline{\Delta^0}\, {}^t(\overline{P_j^0})^{-1}, \frac{ns}{2} \right) \prod_{i=1}^{r_1 + r_2} \frac{d\tau_i}{\tau_i}\,,$$

où l'intégrale porte sur les $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{r_1 + r_2}) \in U/H$ et où $d_E = \det(\Delta)^2$ désigne le discriminant de E, $D(\tau)$ la matrice diagonale

$$(\tau_1, \ldots, \tau_{r_1+1}, \ldots, \tau_{r_1+r_2}, \tau_{r_1+1}, \ldots, \tau_{r_1+r_2})\,,$$

H le sous-espace de $(\mathbf{R}_+^\times)^{r_1 + r_2}$ défini par l'équation

$$\prod_{i=1}^{r_1 + r_2} \tau_i^{e_i} = 1$$

et U l'image dans H des unités du corps de nombres E.

On fait encore le changement de variables suivant :

$$\mathbf{R}_+^{r_1 + r_2} \to \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^r$$

$$(\tau_1, \ldots, \tau_{r_1 + r_2}) \mapsto (u, x_1, \ldots, x_r)$$

où $r = r_1 + r_2 - 1$ et

$$\tau_j = u \cdot \prod_{i=1}^{r} |\, \varepsilon_i^{(j)} \,|^{2x_i} \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant j \leqslant r_1 + r_2\,,$$

où $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ est un système d'unités fondamentales de E.

Le Jacobien de ce changement de variables est

$$\left(\prod_{i=1}^{r_1 + r_2} \tau_i \right) u^{-1} \cdot 2^{r_1 - 1} \cdot n\, R\,,$$

où R désigne le régulateur de E défini par

$$R = \frac{1}{n} \cdot 2^{r_2} \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1^{(1)} & \cdots & \varepsilon_r^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_1^{(r+1)} & \cdots & \varepsilon_r^{(r+1)} \end{vmatrix}$$

D'autre part, les unités de E ont pour image le réseau $\mathbf{Z}^r$ dans $\mathbf{R}^r$ et les racines de l'unité contenues dans E ont pour image le vecteur nul. Si on note w le nombre de ces racines alors le cardinal de U est $\frac{w}{2}$.

Finalement l'expression K devient

$$K = 2^{r_1} \cdot w^{-1} n\, R \sum_{j=1}^{h} \int_{x \in [0,1]^r} Z\left(P_{j,x}^0, \frac{ns}{2}\right) dx\,,$$

où on a noté $P_{j,x}$ la matrice

$$P_{j,x} = P_j^{-1} \Delta D(\tau)\, {}^t\overline{\Delta}\, {}^t(\overline{P_j^{-1}})\,.$$

Réécrivons à présent l'égalité du théorème 1 avec les expressions qui viennent d'être calculées.

Proposition 12 (Formule de Hecke). *Soit*

$$\Lambda_E(s) = (2^{r_2} \pi^{n/2} |d_E|^{\frac{1}{2}})^{-s}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} \zeta_E(s)$$

et pour une matrice P *réelle, symétrique, définie positive, posons*

$$\Lambda(P, s) = \pi^{-s} \Gamma(s)\, Z(P, s)\,.$$

Alors

$$w \cdot \Lambda_E(s) = 2^{r_1 - 1} \cdot n\, R \sum_{j=1}^{h} \int_{x \in [0,1]^r} \Lambda\left(P_{j,x}^0, \frac{ns}{2}\right) dx\,.$$

Remarque. Il serait intéressant de faire le calcul précédent dans un cas plus général où l'on considère un quasi-caractère ω de $\mathbf{A}^\times$ quelconque. Ainsi $\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}$ correspond à un caractère de Hecke sur le groupe des idéaux de E (cf. [4], chap. 8, § 3, p. 156) et la difficulté est alors de calculer l'intégrale toroïdale aux places finies sur lesquelles le quasi-caractère $\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}$ se ramifie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Borel, A. *Linear algebraic groups.* Benjamin (1969).

[2] Borevitch, Z. I. et I. R. Chafarevitch. *Théorie des Nombres.* Gauthiers Villars (1967).

[3] Bourbaki, N. *Algèbre, chapitres V, VII.* Masson (1981).

[4] Goldstein, L. J. *Analytic number theory.* Prentice Hall (1971).