

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 31 (1985)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** FORMES DE SEIFERT ET FORMES QUADRATIQUES ENTIÈRES  
**Autor:** Kervaire, Michel  
**Kapitel:** 1. Le cas  $= -1$   
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-54564>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 22.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

monodromie  $t: V \rightarrow V$  de la fibration et  $i_+$  et  $i_- \circ t: V \rightarrow S^{2m+1} - V$  sont homotopes dans le complémentaire de  $V$ . On a donc

$$\begin{aligned} A(x, y) &= l(x, i_+(y)) = l(x, i_-ty) \\ &= l(i_+x, ty) = (-1)^{m+1} l(ty, i_+x) \\ &= (-1)^{m+1} A(ty, x). \end{aligned}$$

Ainsi,  $S(x, y) = A(x, y) + (-1)^m A(y, x) = A((1-t)x, y)$ , et

$$\det S = \det(A) \cdot \det(1-t).$$

La forme de Seifert associée à la fibre d'un nœud fibré de dimension impaire est donc *unimodulaire*.

*Remarque.* La formule ci-dessus montre aussi en passant que la monodromie  $t: L \rightarrow L$  ( $L = H_m(V)/(\text{torsion})$ ) satisfait à la condition  $\det(1-t) = \pm 1$ . Nous retrouverons cette condition dans le contexte algébrique qui va suivre.

Il est donc assez naturel de se poser le problème suivant sur lequel Claude Weber a attiré mon attention :

**PROBLÈME.** Soit  $S$  une forme bilinéaire, unimodulaire,  $\varepsilon$ -symétrique sur un  $\mathbf{Z}$ -module libre de génération finie  $L$ . Existe-t-il une forme  $A: L \times L \rightarrow \mathbf{Z}$ , unimodulaire (sans propriété de symétrie) telle que  $S = A + \varepsilon A'$  ?

On supposera évidemment  $S$  paire, c'est-à-dire  $S(x, x) = 0 \pmod{2}$  pour tout  $x \in L$ .

En considérant la forme de rang 2 donnée par la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(et  $\varepsilon = +1$ ), on observe immédiatement que la réponse au problème ci-dessus peut être négative.

Pour  $\varepsilon = -1$ , ou pour  $\varepsilon = +1$  avec  $S$  indéfinie, on peut résoudre complètement le problème posé en utilisant la classification des formes bilinéaires, unimodulaires et  $\varepsilon$ -symétriques.

### 1. LE CAS $\varepsilon = -1$

Dans ce cas,  $S$  antisymétrique est une somme orthogonale de plans hyperboliques

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'identité

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

montre que toute forme antisymétrique, unimodulaire provient d'une forme de Seifert unimodulaire.

Pour toute la suite nous nous plaçons donc dans le cas où  $\varepsilon = +1$ .

## 2. LE CAS INDÉFINI

Si  $S$  est symétrique, indéfinie, c'est-à-dire s'il existe un vecteur  $x \in \mathbf{R} \otimes L$ , non nul, tel que  $S_{\mathbf{R}}(x, x) = 0$ , on dispose encore d'une classification. (Voir [H.-M.], ou [Se], Théorème 5, p. 93.) Dans ce cas,  $S$  représente en fait 0 sur  $\mathbf{Z}$ , c'est-à-dire il existe  $x \in L$  non nul tel que  $S(x, x) = 0$ , et (après changement de signe éventuel)  $S$  est isomorphe à une somme orthogonale

$$S = mH \oplus n\Gamma_8, \quad m \geq 1,$$

où  $H$  est le plan hyperbolique (symétrique cette fois) donné par la matrice

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et où  $\Gamma_8$  est la forme unimodulaire entière de rang 8 définie comme suit :

Soit  $\mathbf{Z}^8$  le  $\mathbf{Z}$ -module des points de coordonnées entières dans  $\mathbf{R}^8 = \sum_{i=1}^8 \mathbf{R}e_i$  muni du produit scalaire euclidien  $x \cdot y = \sum_{i=1}^8 x_i \cdot y_i$ . On pose  $a = e_1 + e_2 + \dots + e_8$  et  $b = \frac{1}{2}a$ . Soit  $V_0$  le sous-module de  $V = \mathbf{Z}^8$  formé des points dont le produit scalaire avec  $b$  est entier :

$$V_0 = \{x \in \mathbf{Z}^8 \mid x \cdot b \in \mathbf{Z}\}.$$

On définit alors  $\Gamma_8 = V_0 + \mathbf{Z}b$ . C'est un réseau entier, pair et unimodulaire. (Voir [H.-M.] ou [Se] pour les détails.)

On a déjà vu que la forme hyperbolique