

# IV. The fundamental inequalities in definite spaces

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

IV. THE FUNDAMENTAL INEQUALITIES IN DEFINITE SPACES

IV.1. \*-VALUATIONS (cf. [14]). Let  $(k, *)$  be an involutorial division ring and  $\Gamma$  a totally ordered (additively written) abelian group. A surjective map

$$(7) \quad \varphi: k \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\} \quad (a + \infty = \infty \quad \text{for all } a \in \Gamma \cup \{\infty\})$$

is called \*-valuation iff (i)  $\varphi(x + y) \geq \min\{\varphi(x), \varphi(y)\}$ , (ii)  $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$ , (iii)  $\varphi(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$ , (iv)  $\varphi(x) = \varphi(x^*)$ .

The set of all  $U_\varepsilon := \{x \in k \mid \varphi(x) \geq \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon \in \Gamma$ , is a neighbourhood basis for a division ring topology on  $k$ . In general we think of  $(k, *)$  as equipped with this topology.

IV.2. THE INEQUALITIES. Assume that  $\text{char } k \neq 2$  and that the valuation in (7) has  $\varphi(2) = 0$  (cf. Remark 35). Let  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  be a hermitean form on a  $k$ -space  $\mathfrak{E}$ . Assume  $\mathfrak{E}$  non-degenerate ( $\mathfrak{E}^\perp = (0)$ ). Recall that we write " $\langle \mathfrak{x} \rangle$ " for  $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle$ ,  $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ . It is useful to know a proof for the following fact

LEMMA 14 ([20]). *The following four statements are equivalent*

- (i)  $\forall \mathfrak{x}, \eta \in \mathfrak{E}: \varphi\langle \mathfrak{x} + \eta \rangle \geq \min\{\varphi\langle \mathfrak{x} \rangle, \varphi\langle \eta \rangle\}$  (*triangle inequality*)
- (ii)  $\forall \mathfrak{x}, \eta \in \mathfrak{E}: \langle \mathfrak{x}, \eta \rangle = 0 \Rightarrow \varphi\langle \mathfrak{x} + \eta \rangle = \min\{\varphi\langle \mathfrak{x} \rangle, \varphi\langle \eta \rangle\}$   
(*"Pythagoras"*)
- (iii)  $\forall \mathfrak{x}, \eta \in \mathfrak{E}: \varphi\langle \mathfrak{x}, \eta \rangle \geq \min\{\varphi\langle \mathfrak{x} \rangle, \varphi\langle \eta \rangle\}$  (*"weak Cauchy-Schwarz"*)
- (iv)  $\forall \mathfrak{x}, \eta \in \mathfrak{E}: 2\varphi\langle \mathfrak{x}, \eta \rangle \geq \varphi\langle \mathfrak{x} \rangle + \varphi\langle \eta \rangle$  (*"Cauchy-Schwarz"*)

(Notice that each statement implies anisotropy of  $\mathfrak{E}$ ).

*Proof.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Let  $\mathfrak{x} \perp \eta$  and

$$\begin{aligned} \varphi\langle \mathfrak{x} \rangle &\leq \varphi\langle \eta \rangle; \quad \varphi\langle \mathfrak{x} \rangle = \varphi\langle 2\mathfrak{x} \rangle = \varphi\langle (\mathfrak{x} + \eta) \\ &+ (\mathfrak{x} - \eta) \rangle \geq \min\{\varphi\langle \mathfrak{x} + \eta \rangle, \varphi\langle \mathfrak{x} - \eta \rangle\} = \varphi\langle \mathfrak{x} + \eta \rangle \geq \varphi\langle \mathfrak{x} \rangle. \end{aligned}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iv): Assume  $\mathfrak{x} \neq 0 \neq \eta$ . Pick  $\mathfrak{b}$  in the span of  $\mathfrak{x}, \eta$  such that

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{b} + \lambda\eta, \quad \mathfrak{b} \perp \eta; \quad 2\varphi\langle \mathfrak{x}, \eta \rangle = 2\varphi\langle \mathfrak{b} + \lambda\eta, \eta \rangle = 2\varphi\langle \lambda\eta, \eta \rangle \\ &= 2\varphi\langle \lambda \rangle + 2\varphi\langle \eta \rangle = \varphi\langle \lambda\eta \rangle + \varphi\langle \eta \rangle \geq \varphi\langle \mathfrak{x} \rangle + \varphi\langle \eta \rangle. \end{aligned}$$

(iv)  $\Rightarrow$  (iii): trivial

(iii)  $\Rightarrow$  (i): straight forward. □

IV.3. THE CLASS  $\mathcal{D}$  OF DEFINITE SPACES. Positive definite forms over ordered fields satisfy the triangle inequality as well as the Cauchy-Schwarz inequality. We therefore set down

*Definition 15.* A definite space is a nondegenerate hermitean space  $(\mathfrak{E}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$  over an involutorial division ring  $(k, *)$ ,  $\text{char } k \neq 2$ , that is equipped with a  $*$ -valuation  $\varphi$  that has  $\varphi(2) = 0$  (cf. Remark 35) and that satisfies one (and hence all) of the four statements in Lemma 14. A definite space  $\mathfrak{E}$  will always be considered as a topological vector space, the topology being given by the zero-neighbourhood basis  $\mathcal{U}_\gamma := \{\eta \in \mathfrak{E} \mid \varphi\langle \eta \rangle \geq \gamma\}$ ,  $\gamma \in \Gamma$ . If  $(e_\iota)_{\iota \in I}$  is any family over vectors in  $\mathfrak{E}$  such that the net of all finite ("partial") sums  $\sum e_\iota$  has a limit  $x$  in  $\mathfrak{E}$  then we write  $x = \sum_{\iota \in I} e_\iota$  and call  $(e_\iota)_{\iota \in I}$  summable.

LEMMA 16. Let  $(e_\iota)_{\iota \in I}$  be an orthogonal family in the definite space  $(\mathfrak{E}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$  and  $\mathfrak{F}$  its span. For each  $x$  in the topological closure of  $\mathfrak{F}$  we have  $x = \sum_{\iota \in I} \langle x, e_\iota \rangle \langle e_\iota \rangle^{-1} e_\iota$ .

*Proof.* Let  $\mathcal{P}$  be the set of all finite subsets of  $I$ . For  $V \in \mathcal{P}$  we set  $x_V := \sum_{\iota \in V} \langle x, e_\iota \rangle \langle e_\iota \rangle^{-1} e_\iota$ . We have to prove that for each  $\gamma \in \Gamma$  there is  $U \in \mathcal{P}$  such that  $\varphi\langle x - x_V \rangle \geq \varepsilon$  for all  $V$  with  $U \subset V \in \mathcal{P}$ . Now there is  $\eta \in \mathfrak{F}$  with  $\varphi\langle x - \eta \rangle \geq \varepsilon$ . Pick  $U \in \mathcal{P}$  with  $\eta \in \text{span}\{e_\iota \mid \iota \in U\}$ . If  $U \subset V \in \mathcal{P}$  then  $x - x_V \perp x_V - \eta$ , so by "Pythagoras" (Lemma 14 (ii)) we obtain  $\varepsilon \leq \varphi\langle x - \eta \rangle = \min\{\varphi\langle x - x_V \rangle, \varphi\langle x_V - \eta \rangle\} \leq \varphi\langle x - x_V \rangle$ .  $\square$

## V. NECESSARY CONDITIONS IN $\mathcal{D}$ FOR $L_c = L_{\perp\perp}$

The principal result of this section is

THEOREM 17 ([20]). Let  $\mathfrak{E}$  be an infinite dimensional definite space carrying an admissible topology i.e., the topology mentioned in Definition 15 is admissible in the sense of Definition 1; let furthermore  $(e_\iota)_{\iota \in I}$  be an orthogonal family in  $\mathfrak{E}$  such that  $(\varphi\langle e_\iota \rangle)_{\iota \in I}$  has a lower bound in  $\Gamma$ . Then  $\sum_{\iota \in I} e_\iota$  exists.

*Proof.* Let  $\mathfrak{F} := \text{span}\{\langle e_\iota \rangle^{-1} e_\iota - \langle e_0 \rangle^{-1} e_0 \mid \iota \in I\}$ . We first wish to show that  $\langle e_0 \rangle^{-1} e_0$  is not an element of the topological closure  $\overline{\mathfrak{F}}$ . Indeed,