

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 32 (1986)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE  
**Kapitel:** 1.1. Comment formuler le problème  
**Autor:** Raymond, Xavier Saint  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-55077>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

de développement limité du type (2.1) commun à tous les  $u_k$ , formule qui joue un rôle central pour le recollement au paragraphe 2.3. A ces difficultés s'ajoute le fait que nous devons choisir les paramètres  $\lambda_k$  tellement grands que l'on n'a plus  $\lambda_k \sim \lambda_{k+1}$  (contrairement à la situation standard où  $\lambda_k$  est une puissance de  $k$ ), ce qui a pour effet de multiplier les contraintes sur ces paramètres (car  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k a_k \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{k+1} a_k$  en général).

L'originalité du théorème réside donc dans l'assouplissement des techniques de recollement des fonctions  $u_k$ , la partie optique géométrique étant réduite au choix trivial de la phase  $B(t) + iy$ : c'est exactement le contraire de la méthode décrite au chapitre 2 où l'étape délicate est la construction de la phase (paragraphe 2.2), le reste (paragraphe 2.3 et 2.4) étant standard (cf. Alinhac et Zuily [3], et Alinhac [1]).

Enfin, nous tenons à remercier C. Zuily pour les discussions que nous avons eues, tout particulièrement pour la mise au point du lemme 3.3, ainsi que pour avoir bien voulu relire ces notes; nous lui en sommes très reconnaissant.

## CHAPITRE 1: NOTATIONS ET RÉSULTATS PRINCIPAUX

### 1.1. COMMENT FORMULER LE PROBLÈME

Nous nous plaçons au voisinage d'un point  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ ; l'une des coordonnées dans  $\mathbf{R}^n$  est le temps, mais avant de l'écrire explicitement, nous considérerons que c'est une fonction donnée  $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$  à valeurs réelles telle que  $d\varphi(x_0) \neq 0$  (afin de pouvoir la prendre comme coordonnée près de  $x_0$ ).

On étudie un « phénomène physique » représenté par une fonction  $u \in C^1(\mathbf{R}^n)$  à valeurs complexes qui est connue dans le passé ( $u(x) = u_0(x)$  si  $\varphi(x) \leq \varphi(x_0)$ ) et qui satisfait une équation d'évolution  $Lu + c_0 u = f$ , avec  $L = \sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_j$  où  $\partial_j = \partial/\partial x_j$  et les  $a_j \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$  sont à valeurs complexes ainsi que le terme d'ordre zéro  $c_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ . Ici,  $u_0(x)$  et  $f(x)$  sont des données du problème.

Nous nous intéressons à l'unicité de la solution d'un tel problème indépendamment de son existence, ou plutôt à l'unicité locale en  $x_0$ : étant données deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  du problème, coïncident-elles dans tout un

voisinage de  $x_0$ ? Comme tout est linéaire, cette question nous conduit (en posant  $v = u_1 - u_2$ ) à l'étude du noyau de l'application linéaire associée: de

$$\begin{cases} Lv + c_0 v = 0 \\ v(x) = 0 \quad \text{si} \quad \varphi(x) \leq \varphi(x_0), \end{cases}$$

peut-on déduire que  $v = 0$  dans tout un voisinage de  $x_0$ ?

A l'exception des résultats cités au chapitre 6, nous rechercherons essentiellement une propriété d'unicité « stable » dans le sens suivant: sous les hypothèses des théorèmes d'unicité (cf. théorème 1.2), la propriété d'unicité demeurera si l'on modifie le terme d'ordre zéro  $c_0$ , ou si l'on se place en un point voisin de  $x_0$  sur la surface d'équation  $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ . Ce point de vue explique que nous ne faisons pas mention du théorème d'Holmgren, ni de théorèmes analogues; cela donne en outre à nos réciproques la forme que l'on trouvera typiquement énoncée au théorème 1.1 ci-dessous.

## 1.2. NATURE DES HYPOTHÈSES

Nous introduisons maintenant les objets algébriques sur lesquels nous désirons « lire » la réponse à la question que nous avons posée. Ces objets sont construits à partir de la fonction temps  $\varphi$  et de l'opérateur  $L$ , et reflètent leurs propriétés près de  $x_0$ . Nous supposons tout au long de ces notes que  $L$  est non dégénéré en  $x_0$ , c'est-à-dire que  $\sum_{j=1}^n |a_j(x_0)|^2 \neq 0$ .

Commençons par une définition: Le problème est dit caractéristique si  $L\varphi(x_0) = 0$ . Cette définition est indépendante de la fonction  $\varphi$  pourvu que cette dernière définisse les mêmes demi-espaces du passé et du futur. Les chapitres 2, 3 et 4 sont consacrés à l'étude du problème non caractéristique, tandis que le problème caractéristique est abordé au chapitre 5.

Nous allons construire maintenant l'objet qui permettra principalement la discussion de l'unicité: l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}$  associée au champ  $L$ . Par cette expression, nous désignons l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des champs réels  $X = \operatorname{Re} L$ ,  $Y = \operatorname{Im} L$  et de tous leurs commutateurs:  $[X, Y] = XY - YX$ ,  $[X, [X, Y]]$  etc. En chaque point  $x$ , ces combinaisons linéaires forment un sous-espace vectoriel de  $T_x \mathbf{R}^n$  dont la dimension est appelée rang de l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}$  au point  $x$  et que nous noterons  $\operatorname{rg} \mathcal{L}(x)$ . Comme  $L$  est non dégénéré en  $x_0$ , on a  $\operatorname{rg} \mathcal{L}(x) \in \{1, \dots, n\}$  pour tout  $x$  voisin de  $x_0$ , mais le rang de  $\mathcal{L}$  n'a aucune raison d'être constant lorsqu'on passe d'un point à un point voisin.