Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Kapitel: 1.3. Enoncé des résultats principaux

Autor: Raymond, Xavier Saint

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

l'existence de variétés de dimension 1 ou 2 le long desquelles le champ L reste tangent (sans qu'il s'agisse de variétés intégrales de $\mathscr{L}$) ainsi qu'une condition de signe sur les coefficients de L.

1.3. Enoncé des résultats principaux

Munis de ces notations, nous pouvons énoncer les principales réponses apportées à la question posée en 1.1.

Théorème 1.1. *Posons* $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)$ *et* $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \geqslant 3\}$. *Si le problème est non caractéristique et si* $x_0 \in \bar{S}_3$, *alors pour tout voisinage* Ω *de* x_0, *il existe* $\omega \subset \Omega$ *avec* $\omega \cap S_3 \neq \emptyset$, $u \in C^\infty(\omega)$ *et* $a \in C^\infty(\omega)$ *tels que*

$$\text{(1.1)} \quad \begin{cases} (L + c_0 + a)\, u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega\,, \\ \operatorname{Supp} u' = \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}\,, \quad \textit{et} \\ \operatorname{Supp} a \subset \omega_+\,. \end{cases}$$

Moralement, ce théorème signifie que pour avoir la propriété d'unicité, il est nécessaire que $\operatorname{rg} \mathscr{L} < 3$ sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Cette condition est également suffisante lorsque nous faisons l'une des deux hypothèses « techniques » introduites au paragraphe précédent:

Théorème 1.2. *Posons* $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)$ *et* $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \geqslant 3\}$; *supposons que le problème est non caractéristique et que* $x_0 \notin \bar{S}_3$; *supposons encore qu'il existe un voisinage* Ω *de* x_0 *tel que l'une des deux hypothèses « techniques » suivantes soit vérifiée: soit* L *vérifie la condition* (R) *dans* Ω, *soit* L *vérifie la condition* (P) *dans* $\mathring{\Omega}_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) > \varphi(x_0)\}$. *Alors, pour tout voisinage* ω *de* x_0 *et toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$\text{(1.2)} \quad \begin{cases} (L + c_0)\, u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega, \quad \textit{et} \\ u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}\,, \end{cases}$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* x_0.

1.4. Commentaires sur les théorèmes

1. Comme nous le verrons au paragraphe 2.1, le théorème 1.1 s'applique essentiellement aux opérateurs de la forme