

## 1.4. Commentaires sur les théorèmes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

l'existence de variétés de dimension 1 ou 2 le long desquelles le champ  $L$  reste tangent (sans qu'il s'agisse de variétés intégrales de  $\mathcal{L}$ ) ainsi qu'une condition de signe sur les coefficients de  $L$ .

### 1.3. ENONCÉ DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

Munis de ces notations, nous pouvons énoncer les principales réponses apportées à la question posée en 1.1.

**THÉORÈME 1.1.** *Posons  $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0) \text{ et } \text{rg } \mathcal{L}(x) \geq 3\}$ . Si le problème est non caractéristique et si  $x_0 \in \bar{S}_3$ , alors pour tout voisinage  $\Omega$  de  $x_0$ , il existe  $\omega \subset \Omega$  avec  $\omega \cap S_3 \neq \emptyset$ ,  $u \in C^\infty(\omega)$  et  $a \in C^\infty(\omega)$  tels que*

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (L + c_0 + a)u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega, \\ \text{Supp } u' = \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}, \quad \text{et} \\ \text{Supp } a \subset \omega_+. \end{array} \right.$$

Moralement, ce théorème signifie que pour avoir la propriété d'unicité, il est nécessaire que  $\text{rg } \mathcal{L} < 3$  sur la surface d'équation  $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ . Cette condition est également suffisante lorsque nous faisons l'une des deux hypothèses « techniques » introduites au paragraphe précédent :

**THÉORÈME 1.2.** *Posons  $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0) \text{ et } \text{rg } \mathcal{L}(x) \geq 3\}$ ; supposons que le problème est non caractéristique et que  $x_0 \notin \bar{S}_3$ ; supposons encore qu'il existe un voisinage  $\Omega$  de  $x_0$  tel que l'une des deux hypothèses « techniques » suivantes soit vérifiée : soit  $L$  vérifie la condition (R) dans  $\Omega$ , soit  $L$  vérifie la condition (P) dans  $\dot{\Omega}_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) > \varphi(x_0)\}$ . Alors, pour tout voisinage  $\omega$  de  $x_0$  et toute  $u \in C^1(\omega)$  solution du système*

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (L + c_0)u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega, \quad \text{et} \\ u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}, \end{array} \right.$$

la fonction  $u$  s'annule au voisinage de  $x_0$ .

### 1.4. COMMENTAIRES SUR LES THÉORÈMES

1. Comme nous le verrons au paragraphe 2.1, le théorème 1.1 s'applique essentiellement aux opérateurs de la forme

$$L = \partial_t + i[t^{k_1}\partial_{y_1} + t^{k_2}\partial_{y_2}], k_1 \neq k_2, \varphi = t.$$

Ce théorème a été démontré dans le cadre plus général des opérateurs d'ordre  $m$  quelconque par Alinhac [1] et Robbiano [19] sous la condition  $k_1 = 0$ .

2. Le théorème 1.2 s'applique aux deux opérateurs suivants définis dans  $\mathbf{R}^2$ :

$$L_{(R)} = \partial_t + it(t+y)\partial_y \quad \text{et} \quad L_{(P)} = \partial_t + ie^{-1/t^2}\partial_y, \varphi = t,$$

le premier vérifiant la condition (R), mais pas la condition (P), et réciproquement pour le second. Ce théorème 1.2 est dû à Strauss et Trèves [24] qui l'ont démontré d'une part sous la condition  $\text{rg } \mathcal{L}(x_0) = 2$  dans  $\mathbf{R}^2$  (cas particulier de la condition (R)) et d'autre part en supposant que  $L$  vérifie la condition (P) dans tout un voisinage  $\Omega$  de  $x_0$ .

3. Le théorème 1.2 devient faux si nous supprimons les hypothèses « techniques » ou même si nous supposons seulement que  $L$  vérifie la condition (R) dans  $\hat{\Omega}_+$ ; nous montrerons en effet au chapitre 4 que l'opérateur

$$\begin{cases} L = \partial_t + ie^{-1/t} \sin \frac{1}{t} \partial_y & \text{si } t > 0, \\ L = \partial_t & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

ne possède pas la propriété d'unicité par rapport à  $t = 0$  pourvu que l'on ajoute un terme d'ordre inférieur, bien que  $\text{rg } \mathcal{L} \equiv 2$  pour  $t > 0$ .

4. Dans l'énoncé du théorème 1.1, il convient de remarquer que l'ouvert  $\omega$  ne contient pas nécessairement le point  $x_0$ ; le théorème 1.1 signifie donc ceci: si nous ne savons pas toujours construire une solution de (1.1) au voisinage de  $x_0$ , nous savons du moins le faire au voisinage de  $x_1$  pour un point  $x_1$  arbitrairement proche de  $x_0$  sur la surface d'équation  $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ . En revanche, lorsque les hypothèses du théorème 1.2 sont vérifiées en  $x_0$ , elles le sont en tout point suffisamment proche de  $x_0$  sur la surface d'équation  $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ , et la conclusion s'applique quel que soit le terme d'ordre inférieur; le théorème 1.2 est donc bien une réciproque du théorème 1.1. Cette remarque correspond à la propriété d'unicité « stable » dont nous avons parlé au paragraphe 1.1.

5. Les hypothèses du théorème 1.2 sous la condition (R) sont équivalentes au groupe d'hypothèses suivant: le problème est non caractéristique, et il existe un voisinage de  $x_0$  où  $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$  et où la propriété (Q) introduite par Nirenberg et Trèves [17] est vérifiée (cette propriété (Q) peut s'énoncer

de la façon suivante: par tout point  $x \in \Omega$  tel que  $\text{rg } \mathcal{L}(x) = 1$  passe une variété intégrale de  $\mathcal{L}$ ). Sous la condition (P), nous pourrions omettre l'hypothèse  $x_0 \notin \bar{S}_3$  (car (P) dans  $\bar{\Omega}_+ \Rightarrow \bar{S}_3 \cap \Omega = \emptyset$ ), mais nous préférons considérer ce groupe d'hypothèses comme l'hypothèse  $x_0 \notin \bar{S}_3$  à laquelle nous avons rajouté une hypothèse « technique ».

6. *Plan de l'ensemble.* Nous exposerons les techniques de construction de contre-exemples à l'unicité dans le chapitre 2 que nous consacrons à démontrer le théorème 1.1. Symétriquement, le chapitre 3 contiendra la démonstration du théorème 1.2 comme illustration des méthodes développées pour obtenir l'unicité. Par ces deux théorèmes, nous avons « génériquement » répondu à la question posée; nous avons cependant écarté trois problèmes marginaux qui feront l'objet des chapitres suivants: au chapitre 4, nous étudierons sur un modèle la situation lorsque  $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$  mais que les hypothèses « techniques » ne sont pas vérifiées; au chapitre 5, nous étudierons le problème caractéristique; au chapitre 6 enfin, nous étudierons l'influence du terme d'ordre zéro,  $c_0$ .

#### 1.5. CHOIX DES COORDONNÉES POUR LES PROBLÈMES NON CARACTÉRISTIQUES

Dans ce paragraphe, nous donnons pour les problèmes non caractéristiques (étudiés aux chapitres 2, 3 et 4) un choix de coordonnées permettant d'écrire sous une forme canonique l'opérateur à étudier.

LEMME 1.3. *Supposons que le problème soit non caractéristique; alors il existe près de  $x_0$  un système de coordonnées  $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$  tel que:*

1.  $x_0 = (0, 0)$
2.  $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$
3.  $L + c_0 = a(y, t) [\partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)]$

où  $a: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $b: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$  et  $c: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$  sont des fonctions  $C^\infty$  au voisinage de  $(0, 0)$  et  $a(y, t) \neq 0$  au voisinage de  $(0, 0)$ .

*Démonstration.* Commençons par choisir des coordonnées  $x_1, \dots, x_n$  telles que  $x_0 = (0, \dots, 0)$  et  $x_n = \varphi(x) - \varphi(x_0)$ ; comme le problème est non caractéristique, nous savons que  $a_n(0, \dots, 0) \neq 0$ ; on peut donc écrire

$$L + c_0 = a_n(x) \left[ \partial_n + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j(x) + i\beta_j(x)) \partial_j + c_1(x) \right]$$