1.5. Choix des coordonnées pour les problèmes non caractéristiques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.08.2024**

de la façon suivante: par tout point $x \in \Omega$ tel que rg $\mathscr{L}(x) = 1$ passe une variété intégrale de $\mathscr{L}$). Sous la condition (P), nous pourrions omettre l'hypothèse $x_0 \notin \bar{S}_3$ (car (P) dans $\mathring{\Omega}_+ \Rightarrow \bar{S}_3 \cap \Omega = \emptyset$), mais nous préférons considérer ce groupe d'hypothèses comme l'hypothèse $x_0 \notin \bar{S}_3$ à laquelle nous avons rajouté une hypothèse « technique ».

6. *Plan de l'ensemble.* Nous exposerons les techniques de construction de contre-exemples à l'unicité dans le chapitre 2 que nous consacrons à démontrer le théorème 1.1. Symétriquement, le chapitre 3 contiendra la démonstration du théorème 1.2 comme illustration des méthodes développées pour obtenir l'unicité. Par ces deux théorèmes, nous avons « génériquement » répondu à la question posée; nous avons cependant écarté trois problèmes marginaux qui feront l'objet des chapitres suivants: au chapitre 4, nous étudierons sur un modèle la situation lorsque rg $\mathscr{L} \leqslant 2$ mais que les hypothèses « techniques » ne sont pas vérifiées; au chapitre 5, nous étudierons le problème caractéristique; au chapitre 6 enfin, nous étudierons l'influence du terme d'ordre zéro, c_0.

1.5. Choix des coordonnées pour les problèmes non caractéristiques

Dans ce paragraphe, nous donnons pour les problèmes non caractéristiques (étudiés aux chapitres 2, 3 et 4) un choix de coordonnées permettant d'écrire sous une forme canonique l'opérateur à étudier.

Lemme 1.3. *Supposons que le problème soit non caractéristique; alors il existe près de* x_0 *un système de coordonnées* $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ *tel que:*

1. $x_0 = (0, 0)$

2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$

3. $L + c_0 = a(y, t)\,[\partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)]$

où $a: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, $b: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}$ *et* $c: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *sont des fonctions* C^∞ *au voisinage de* $(0, 0)$ *et* $a(y, t) \neq 0$ *au voisinage de* $(0, 0)$.

Démonstration. Commençons par choisir des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ telles que $x_0 = (0, \ldots, 0)$ et $x_n = \varphi(x) - \varphi(x_0)$; comme le problème est non caractéristique, nous savons que $a_n(0, \ldots, 0) \neq 0$; on peut donc écrire

$$L + c_0 = a_n(x)\left[\partial_n + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j(x) + i\beta_j(x))\,\partial_j + c_1(x)\right]$$

où les $\alpha_j(x)$ et les $\beta_j(x)$ sont à valeurs réelles. Pour $k = 1, \ldots, n-1$, soit $y_k(x)$ la solution du système

$$\begin{cases} y_k(x', 0) = x_k \\ \partial_n y_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \partial_j y_k = 0 \, . \end{cases}$$

Si de plus nous posons $t(x) = x_n$, comme la matrice jacobienne $\dfrac{\partial(y, t)}{\partial x}$ admet l'unité pour déterminant en $(0, \ldots, 0)$, nous pouvons utiliser (y, t) comme nouvelles coordonnées locales; nous obtenons que $L + c_0 = (Lt)\partial_t + \sum (Ly_k)\partial_{y_k} + c_0$ est de la forme 3, d'où le lemme.

Chapitre 2: Construction d'un contre-exemple

Dans ce chapitre, nous proposons une démonstration du théorème 1.1. La méthode utilisée pour obtenir ce résultat est désormais classique; elle a été mise au point successivement par Cohen [8], Pliś [18], Hörmander [10], Alinhac-Zuily [3]. Ici, nous suivrons de très près la démonstration du théorème 1 d'Alinhac [1] (qui, pour le premier ordre, est un cas particulier du théorème 2.2 ci-dessous avec $k_1 = 0$ et $k_2 = 1$).

La technique consiste à choisir une suite de valeurs positives δ_k tendant vers 0, puis à construire par les méthodes de l'optique géométrique des fonctions u_k, pour $\varphi(x)$ voisin de $\varphi(x_0) + \delta_k$, qui soient approximativement dans le noyau de $L + c_0$: c'est ce que nous faisons en 2.2. Puis on ajuste la taille de ces fonctions afin de pouvoir les recoller pour obtenir une solution u définie au voisinage de x_0 et telle que u et $a = -(L+c_0)u/u$ soient régulières: c'est l'opération effectuée en 2.3, les dernières vérifications étant reportées en 2.4.

Afin de limiter la complexité de la construction, il convient de choisir un bon système de coordonnées. C'est ce par quoi nous commençons.

2.1. Nouveau choix de coordonnées

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1.1 et fixons le voisinage Ω. Grâce au lemme 1.3, nous pouvons déjà trouver des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ dans Ω (quitte à restreindre ce dernier) telles que