2.2. Optique géométrique

1. $x_0 = (0, 0)$
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

De plus, en utilisant l'hypothèse $x_0 \in \bar{S}_3$, on peut trouver un point $x_3 = (y_3, 0) \in \Omega$ tel que rg $\mathscr{L}(x_3) \geqslant 3$. Nous pouvons alors écrire notre opérateur $L + c_0$ sous une forme encore plus précise que celle donnée par le point 3. ci-dessus, comme le montre le lemme suivant.

LEMME 2.1. *Supposons que* $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ *et que* rg $\mathscr{L}(x_3) \geqslant 3$ *pour un point* $x_3 \in S = \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$. *Alors, pour tout voisinage* Ω *de* x_3, *il existe un point* $x_2 \in \Omega \cap S$, *un voisinage* ω *de* x_2 *et des entiers* $k_1 \geqslant 0$ *et* $k_2 > 0$ *tels que* $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ *et* $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ *dans* ω *avec* $(b_1(x_2), b_2(x_2))$ *linéairement indépendants.*

Démonstration. On peut déjà supposer que Ω est suffisamment petit pour que le rang de $\mathscr{L}$ reste supérieur ou égal à 3 dans $\Omega \cap S$.

Soit $k_1 = \inf\{k \geqslant 0 \mid \exists x \in \Omega \cap S : \partial_t^k b(x) \neq 0\}$. Alors $k_1 < \infty$ car rg $\mathscr{L}(x_3) \geqslant 3$. Soit donc x_1 un point de $\Omega \cap S$ tel que $\partial_t^{k_1} b(x_1) \neq 0$, et soit $\omega \subset \Omega$ un voisinage de x_1 tel que $\partial_t^{k_1} b(x) \neq 0$ pour tout $x \in \omega \cap S$. Dans ω, on a $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ avec $b_1(x) \neq 0$ si $x \in S$.

Soit maintenant $k_2 = \inf\{k > 0 \mid \exists x \in \omega \cap S : \partial_t^k b_1(x)$ et $b_1(x)$ soient linéairement indépendants$\}$. Alors $k_2 < \infty$ car rg $\mathscr{L}(x_1) \geqslant 3$. On peut donc écrire dans ω, $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ et il existe un point $x_2 \in \omega \cap S$ tel que $b_1(x_2)$ et $b_2(x_2)$ soient linéairement indépendants.

Ce lemme nous permettra donc de déduire le théorème 1.1 du théorème suivant (que nous démontrerons aux paragraphes 2.2, 2.3 et 2.4).

THÉORÈME 2.2. *Supposons que* $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$, *que* $b : \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n-1}$ *et* $c : \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *sont des fonctions* C^∞ *dans un voisinage* Ω *de* $x_0 = (y_0, 0)$ *et qu'il existe des entiers* $k_1 \geqslant 0$ *et* $k_2 > 0$ *tels que* $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ *et* $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ *dans* Ω *avec* $(b_1(x_0), b_2(x_0))$ *linéairement indépendants. Alors il existe un voisinage* ω *de* x_0, $u \in C^\infty(\omega)$ *et* $a \in C^\infty(\omega)$ *vérifiant (1.1).*

2.2. OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Nous dirons que $w \in B^\infty(\mathbf{R}^n \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ si $w(x, \delta)$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n \times [0, \infty[$, indéfiniment dérivable en x pour $\delta > 0$ et dont les dérivées restent bornées quand δ tend vers 0.

PROPOSITION 2.3. *Sous les hypothèses du théorème 2.2, il existe au voisinage de* $(y_0, 0, 0)$ *deux fonctions* φ *et* $\beta \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ *telles que*

$$(2.1)\quad \begin{cases} \operatorname{Re} \varphi(y, t, \delta) = -\delta^{k_1+k_2-1}(t-\delta)^2\, \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta) & \textit{pour} \quad \delta > 0 \\ \beta(y_0, 0, 0) = \beta_0 > 0 \end{cases}$$

et telles que pour toute fonction $\gamma \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$, *il existe une fonction* $w(y, s, \varepsilon) \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ *telle que* $w(y, 0, 0) = 1$ *et*

$$(2.2)\quad \begin{cases} \forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \forall \nu \in \mathbf{N}, \exists \delta_{\alpha,\nu}: \ \textit{pour} \quad 0 < \delta < \delta_{\alpha,\nu} \quad \textit{et} \\ \textit{pour} \quad (y, \delta^{-2}(t-\delta)) \quad \textit{dans un voisinage fixe de} \quad (y_0, 0) \\ \textit{(indépendant de} \quad \alpha \quad \textit{et} \quad \nu\textit{)} \\ |\, \partial^\alpha[(L+c_0)h/h]\, | \leqslant 2\, \delta^\nu \end{cases}$$

où on a posé:

$$(2.3)\quad \begin{aligned} &h(y, t, \delta) \\ &= w(y, \delta^{-2}(t-\delta), \delta^{1/3}) \exp\left[-\delta^{-5/3}\, \gamma(y, \delta) + \delta^{-4-k_1-k_2}\, \varphi(y, t, \delta)\right] \end{aligned}$$

(dans (2.2), ∂^α *désigne la dérivation d'ordre* α *par rapport à* y *et* t*).*

Démonstration: en trois parties.

1. *Construction de* φ *et de* β. Choisissons $\eta_0 \in \mathbf{R}^{n-1}$ tel que $b_1(x_0) \cdot \eta_0 = 0$ et $b_2(x_0) \cdot \eta_0 < 0$ (ce qui est possible grâce à l'hypothèse d'indépendance). Il existe alors une fonction C^∞ à valeurs réelles ψ_1 telle que

$$\begin{cases} b_1(y, \delta) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) = 0 \\ \partial_y \psi_1(y_0, 0) = \eta_0 \end{cases}$$

et on pose:

$$\psi_2(y, t, \delta) = \int_\delta^t b(y, r) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) dr\,,$$

$$\varphi(y, t, \delta) = \psi_2(y, t, \delta) + i\psi_1(y, \delta)\,.$$

On calcule alors que:

$\psi_2(y, \delta, \delta) = 0\,,$

$\partial_t \psi_2(y, \delta, \delta) = b(y, \delta) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) = 0$ par choix de ψ_1, et

$\partial_t^2 \psi_2(y, t, \delta) = \partial_t b(y, t) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta)$

$$= \left[k_1 t^{k_1-1} b_1(y, 0) + (k_1+k_2) t^{k_1+k_2-1} b_2(y, t) + t^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, t)\right] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta)$$

$$= \left[-k_1 t^{k_1-1} \delta^{k_2} b_2(y, \delta) + (k_1+k_2) t^{k_1+k_2-1} b_2(y, t) + t^{k_1+k_2}\, \partial_t b_2(y, t)\right] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta)$$

$$= \delta^{k_1+k_2-1}\Bigg[-k_1 \left(\frac{t}{\delta}\right)^{k_1-1} b_2(y, \delta) + (k_1+k_2)\left(\frac{t}{\delta}\right)^{k_1+k_2-1} b_2(y, t)$$

$$+ \delta\left(\frac{t}{\delta}\right)^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, t)\Bigg] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta).$$

Par la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient donc

$$\operatorname{Re} \varphi(y, t, \delta) = \psi_2(y, t, \delta) = -\delta^{k_1+k_2-1}(t-\delta)^2\, \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta)$$

où

$$\beta(y, \sigma, \delta) = \int_0^1 (\theta-1)\Big[-k_1(1+\theta\sigma)^{k_1-1} b_2(y, \delta)$$

$$+ (k_1+k_2)\,(1+\theta\sigma)^{k_1+k_2-1} b_2\big(y, \delta(1+\theta\sigma)\big)$$

$$+ \delta(1+\theta\sigma)^{k_1+k_2}\, \partial_t b_2\big(y, \delta(1+\theta\sigma)\big)\Big] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) d\theta$$

ce qui donne (2.1) puisque $\beta(y_0, 0, 0) = -\dfrac{1}{2} k_2 b_2(y_0, 0) \cdot \eta_0 > 0$ grâce à notre choix de η_0.

Notons que

$$L\varphi(y, t, \delta) = -\, i\delta^{k_1+k_2-1}(t-\delta)^2 b(y, t) \cdot \partial_y \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta)$$

par (2.1), et si on pose $s = \delta^{-2}(t-\delta)$,

$$L\left[\delta^{-4-k_1-k_2}\varphi(y, t, \delta)\right] = -\, i\delta^{-1} s^2 b(y, t) \cdot \partial_y \beta(y, \delta s, \delta).$$

2. *Construction de w.* Définissons l'opérateur M par la relation $(Mw/w) = \big((L+c_0)h/h\big)$ où h est donnée par (2.3); on calcule alors que

$$Mw = \delta^{-2}\left[\partial_s w + \varepsilon N w\right], \qquad \text{avec} \qquad Nw = iB \cdot \partial_y w + Cw,$$

où B et C sont des fonctions de l'espace $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ définies par:

$$B(y, s, \varepsilon) = \varepsilon^5 b(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s),$$
$$C(y, s, \varepsilon) = -ib(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s) \cdot \partial_y \gamma(y, \varepsilon^3) - i\varepsilon^2 s^2 b(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s) \cdot \partial_y \beta(y, \varepsilon^3 s, \varepsilon^3) + \varepsilon^5 c(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s).$$

Définissons une suite de fonctions w_j de l'espace $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ par les formules (toutes ces fonctions sont bien définies sur un même domaine)

$$w_0(y, s, \varepsilon) = 1,$$

$$w_{j+1}(y, s, \varepsilon) = \int_0^s - Nw_j(y, r, \varepsilon)dr, \qquad \text{pour} \quad j \geqslant 0.$$

Une solution de (2.2)-(2.3) est alors obtenue formellement en posant $w = \sum \varepsilon^j w_j$. Choisissons donc une fonction de troncature, c'est-à-dire une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\chi = 1$ sur $[0, 1]$, $\chi = 0$ sur $[2, +\infty[$ et $\chi(\varepsilon) \in [0, 1]$ pour $\varepsilon \in [0, +\infty[$. Nous posons

$$w(y, s, \varepsilon) = \sum_{j \geqslant 0} \varepsilon^j \chi(\lambda_j \varepsilon) w_j(y, s, \varepsilon),$$

et nous allons prouver dans la troisième partie de cette démonstration qu'il existe une suite de réels positifs λ_j telle que cette formule définisse une fonction w de l'espace $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ qui vérifie de plus (2.2)-(2.3).

3. *Construction de la suite* λ_j. Nous allons montrer qu'il suffit que la suite λ_j croisse assez vite pour que l'on ait les deux propriétés précédentes. Nous pouvons déjà imposer que $\lambda_{j+1} > 2\lambda_j$ de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, les $\chi(\lambda_j \varepsilon)$ soient tous égaux à 1 ou à 0 sauf au plus l'un d'entre eux.

Soient k un voisinage compact de y_0, $s_0 > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que les fonctions w_j soient bien définies dans $K = k \times [-s_0, s_0] \times [0, \varepsilon_0]$. Pour obtenir que $w \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$, il suffit d'imposer pour tout $J \in \mathbf{N}$,

$$\lambda_J > (J+1) \sup \{ | D^\alpha w_j(y, s, \varepsilon) | \mid (y, s, \varepsilon) \in K, |\alpha| \leqslant J \quad \text{et} \quad j \leqslant J+1 \}$$

où D^α désigne la dérivation d'ordre α en y et s. En effet, si $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$,

$$w(y, s, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{J} \varepsilon^j w_j(y, s, \varepsilon) + \varepsilon^{J+1} \chi(\lambda_{J+1}\varepsilon) w_{J+1}(y, s, \varepsilon)$$

donc si $0 < |\alpha| \leqslant J$, $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$ et $(y, s, \varepsilon) \in K$,

$$| D^\alpha w(y, s, \varepsilon) | \leqslant \sum_{j=1}^{J+1} \varepsilon \, | D^\alpha w_j(y, s, \varepsilon) | \leqslant 1.$$

Il en résulte que $w \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ car w est continue sur K comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur K.

On a $w(y, 0, 0) = 1$, et si on a choisi le compact K assez petit, on a aussi $|w| > \frac{1}{2}$ dans K (un tel compact K pourra être choisi après coup, une fois que les λ_j auront été fixés); il en résulte que $|(D^\gamma w)/w|$ reste inférieur à 2 pour $\varepsilon \leqslant (\lambda_{|\gamma|})^{-1}$. Comme on peut écrire $D^\alpha(Nw_j/w)$ comme une somme (algébrique) comportant au plus $(|\alpha|+1)! \times 2$ termes de la forme $[(D^\beta N w_j)/w]\,[(D^{\gamma_1}w)/w] \ldots [(D^{\gamma_{|\alpha|}}w)/w]$ (avec $\alpha = \beta + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{|\alpha|}$, par la formule de Leibniz), on obtient une majoration

$$|D^\alpha(Nw_j/w)| \leqslant (|\alpha|+1)!\, 2^{|\alpha|+2} \sup\{|D^\beta N w_j| \mid \beta \leqslant \alpha\}$$

pourvu que $\varepsilon \leqslant (\lambda_{|\alpha|})^{-1}$. Si donc nous demandons pour tout J que

$$\lambda_J > (J+1)!\, 2^{J+2} \sup\{|D^\alpha N w_j(y, s, \varepsilon)| \mid (y, s, \varepsilon) \in K, |\alpha| \leqslant J \text{ et } j \leqslant J+1\},$$

alors pour $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$,

$$Mw = \varepsilon^{J-5}\,[Nw_J(1-\chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)) + Nw_{J+1}\varepsilon\chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)]$$

d'où $|D^\alpha(Mw/w)| \leqslant 2\varepsilon^{J-6}$ pour $|\alpha| \leqslant J$ (et $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$ et $(y, s, \varepsilon) \in K$). Cette majoration étant obtenue pour tout J, on peut remplacer la condition $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$ par $\varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$.

Pour $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et $\nu \in \mathbf{N}$ fixés, on obtient, en posant $J = 6(1+|\alpha|) + 3\nu$, que pour $(y, s, \varepsilon) \in K$ et $\varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$,

$$|\partial^\alpha((L+c_0)h/h)| = |\varepsilon^{-6\alpha_t} D^\alpha(Mw/w)| \leqslant 2\varepsilon^{3\nu} = 2\delta^\nu.$$

2.3. Ajustement des fonctions u_k

Nous posons

$$\delta_k = k^{-3/4},\ l_k = \delta_k - \delta_{k+1}\left(\sim \frac{3}{4}k^{-7/4}\right) \quad \text{et} \quad m_k = \frac{1}{3}\delta_k + \frac{2}{3}\delta_{k+1}.$$

Puis nous considérons les fonctions $h_k(y, t) = h(y, t, \delta_k)$ définies par (2.3); ces fonctions vérifient (2.2) pour k suffisamment grand et $t \in]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[$ pourvu que $\delta_k^{-2}\, l_k$ tende vers 0 lorsque k tend vers l'infini, ce qui est bien le cas puisque $\delta_k^{-2}\, l_k \sim \frac{3}{4}k^{-1/4}$.

En vue de poser $u = h_k + h_{k+1}$ pour t voisin de m_k et de montrer que $a = -(L+c_0)u/u$ est C^∞, il nous faut déterminer le lieu d'équation $h_{k+1} = -h_k$ (qui est contenu dans le lieu d'équation $|h_{k+1}| = |h_k|$).