3.2. Un lemme technique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

un point $x_1 \in B(x_0, \delta/2)$ tel que $x_1 \notin F$. Soit alors $\varepsilon = \sup\{r \mid B(x_1, r) \cap F = \emptyset\}$; on a $0 < \varepsilon \leqslant \delta/2$ puisque F est fermé et que $x_0 \in F$, donc $B(x_1, \varepsilon) \subset B(x_0, \delta) \subset \Omega$. De plus, par compacité il existe $x_2 \in F \cap \overline{B(x_1, \varepsilon)}$.

Soit $\varphi(x) = |x - x_1|^2$; alors u est nulle dans $\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \leqslant \varepsilon^2\} = \overline{B(x_1, \varepsilon)}$ puisque $B(x_1, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ par définition de ε; or le problème est elliptique en x_2 et $d\varphi(x_2) = 2(x_2 - x_1) \neq 0$, donc par le théorème 3.1, $u = 0$ au voisinage de x_2, ce qui contredit le fait que $x_2 \in F = \operatorname{supp} u$.

Cette contradiction prouve que le support de u est à la fois ouvert et fermé. Mais $\operatorname{supp} u \neq \Omega$ puisque $\omega \neq \emptyset$ est contenu dans le complémentaire de ce support. Comme Ω est connexe, c'est que $\operatorname{supp} u = \emptyset$.

3.2. Un lemme technique

Pour préparer la démonstration du théorème 1.2, nous donnons maintenant un résultat d'unicité dans $\mathbf{R}^2$ copié sur le résultat précédent, mais sous des hypothèses plus faibles.

Lemme 3.3. *Soient* $\theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *et* $b : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *deux fonctions* C^∞. *Supposons qu'il existe un voisinage convexe* ω *de* $(y_0, \theta(y_0))$ *tel que* b *soit positive sur* $\omega_+ = \{(y, t) \in \omega \mid t \geqslant \theta(y)\}$ *et* $b(y_0, t_0) > 0$ *pour un* t_0 *tel que* $(y_0, t_0) \in \omega_+$. *Alors pour toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$\text{(3.3)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + ib\,\partial_y u + cu = 0 \quad \text{dans } \omega, \text{ et} \\ u = 0 \quad \text{dans } \omega_- = \{(y, t) \in \omega \mid t \leqslant \theta(y)\} \end{array} \right.$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* $(y_0, \theta(y_0))$.

Démonstration. Elle sera très semblable à celle du théorème 3.1. Pour commencer, nous allons choisir un poids ψ fabriqué de telle manière que l'opérateur $n = N/b$ soit encore bien défini.

Si $b(y_0, \theta(y_0)) > 0$, nous sommes dans le cas elliptique, et le résultat découle du théorème 3.1; nous supposerons donc tout au long de cette démonstration que $b(y_0, \theta(y_0)) = 0$. Le t_0 de l'hypothèse vérifie donc $t_0 > \theta(y_0)$, et il existe un voisinage de (y_0, t_0) contenu dans ω_+ tel que $b \geqslant \delta > 0$ dans ce voisinage (et nous supposerons $\delta \leqslant 1$ dans la suite); nous pouvons même choisir ce voisinage de la forme

$$]y_0-\alpha, y_0+\alpha[\times]t_0-\alpha, t_0+\alpha[\,.$$

Nous posons alors

$$\psi(y, t) = (y-y_0)^2 + \int_{\theta(y)}^{t} b(y, s)\,(t_0+\alpha-s)ds\,. \tag{3.4}$$

Alors, pour tout $0 < \varepsilon \leqslant \alpha^2\delta$, $K_\varepsilon = \{x \in \omega_+ \mid \psi(x) \leqslant \varepsilon\}$ est un compact tel que x_0 soit un point intérieur de $K_\varepsilon \cup \omega_-$, ce qui nous permettra de déduire l'unicité de l'inégalité de Carleman (3.5) comme dans la démonstration du théorème 3.1.

Soit $0 < \varepsilon_0 \leqslant \alpha^2\delta$ que nous fixerons plus loin. En vue d'écrire $w = v\exp\left(-\tau\psi + \int_{t_0}^{t} c(y, s)ds\right)$, posons

$$L_\tau = \left[\exp(-\tau\psi + \int_{t_0}^{t} c(y, s)ds)\right][\partial_t + ib\partial_y + c]\left[\exp(\tau\psi - \int_{t_0}^{t} c(y, s)ds)\right].$$

Grâce à (3.4), et en posant $\int_{t_0}^{t} \partial_y c(y, s)ds = c_1(y, t) + ic_2(y, t)$ où c_1 et c_2 sont à valeurs réelles, on calcule que:

$$\begin{aligned} L_\tau &= [\partial_t + \tau b(t_0+\alpha-t) - c] + ib[\partial_y + \tau\partial_y\psi - (c_1+ic_2)] + c \\ &= M + iN = M + ibn \end{aligned}$$

où nous avons séparé la partie autoadjointe de la partie anti-autoadjointe:

$$\left\{ \begin{aligned} M &= \frac{\partial}{\partial t} + i\tau b\frac{\partial\psi}{\partial y} - ibc_1 \\ n &= \frac{\partial}{\partial y} - i\tau(t_0+\alpha-t) - ic_2\,. \end{aligned} \right.$$

Alors, pour $w \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec supp $w \subset K_{\varepsilon_0}$,

$$\operatorname{Re}\int \frac{1}{i} L_\tau w\overline{nw} = \operatorname{Re}\int \frac{1}{i} Mw\overline{nw} + \int b\,|\,nw\,|^2 \geqslant \operatorname{Re}\int \frac{1}{i} Mw\overline{nw}$$

puisque $b \geqslant 0$ dans K_{ε_0}; puis,

$$2\operatorname{Re}\int Mw\overline{(nw/i)} = -\int |\,w\,|^2\partial_t(\tau(t_0+\alpha-t)+c_2) - \int |\,w\,|^2\partial_y(\tau b\partial_y\psi - bc_1)$$

par intégrations par parties. On obtient donc

$$\int |w|^2 \left[\tau(1-\partial_y(b\partial_y\psi))+(\partial_y(bc_1)-\partial_t(c_2))\right]$$
$$\leqslant 2\,\mathrm{Re}\int \frac{1}{i} L_\tau w \overline{nw} \leqslant 2\int |L_\tau w|\,|nw|\,.$$

Il nous faut maintenant distinguer deux cas. Pour cela, posons $\theta_0 = \sup\{t > \theta(y_0) \mid \forall s \in [\theta(y_0), t], b(y_0, s) = 0\}$; alors $\theta(y_0) \leqslant \theta_0 < t_0$. Si $\theta_0 = \theta(y_0)$, alors pour tout voisinage de $(y_0, \theta(y_0))$ on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que K_ε soit contenu dans ce voisinage; en revanche, si $\theta_0 > \theta(y_0)$, alors ψ est nulle sur $K_0 = \{y_0\} \times [\theta(y_0), \theta_0]$, et c'est seulement pour tout voisinage de K_0 qu'on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que K_ε soit contenu dans ce voisinage. Cette distinction de cas nous permet d'écrire:

1. Si $\theta_0 = \theta(y_0)$, calculons $\partial_y\psi$ par la formule (3.4):

$$\partial_y\psi = 2(y-y_0) + \int_{\theta(y)}^{t} \partial_y b(y, s)\,(t_0+\alpha-s)ds + \theta'(y)b(y, \theta(y))\,(t_0+\alpha-\theta(y))$$

et donc $b(y_0, \theta(y_0)) = \partial_y\psi(y_0, \theta(y_0)) = 0$; d'où $\partial_y(b\partial_y\psi)(y_0, \theta(y_0)) = 0$, ce qui fait qu'on peut trouver ε_0 assez petit pour que $|\partial_y(b\partial_y\psi)| \leqslant 1/2$ dans K_{ε_0}.

2. Si $\theta_0 > \theta(y_0)$, alors b est nulle sur K_0, et comme b est positive dans ω_+, $\partial_y b$ est également nulle dans $\{y_0\} \times]\theta(y_0), \theta_0]$, donc dans K_0; d'où $\partial_y(b\partial_y\psi) = 0$ dans K_0, ce qui fait qu'on peut trouver ε_0 assez petit pour que $|\partial_y(b\partial_y\psi)| \leqslant 1/2$ dans K_{ε_0}.

Le nombre $\varepsilon_0 > 0$ étant choisi, oublions maintenant cette distinction des deux cas, et choisissons τ_0 suffisamment grand pour que $|\partial_y(bc_1) - \partial_t c_2| \leqslant \tau_0/4$ dans K_{ε_0}; alors, pour $\tau \geqslant \tau_0$

$$\frac{\tau}{4}\int |w|^2 \leqslant 2\int |L_\tau w|\,|nw|\,.$$

Enfin, pour $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$, posons

$$w = v\exp(-\tau\psi + \int_{t_0}^{t} c(y, s)ds)$$

et reportons cette expression dans l'inégalité précédente; on obtient:

$$\int e^{-2\tau\psi}\, e^{2\,\mathrm{Re}\int c}\, |v|^2 \leqslant \frac{8}{\tau}\int e^{-2\tau\psi}\, e^{2\,\mathrm{Re}\int c}\, |\partial_t v + ib\partial_y v + cv|\; |\partial_y v + c_1 v|$$

$$+\, 8\int e^{-2\tau\psi}\, e^{2\,\mathrm{Re}\int c}\, |\partial_t v + ib\partial_y v + cv|\; |(\partial_y\psi + i(t_0+\alpha-t))v|\,.$$

Il existe donc une constante C telle que pour toute $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec supp $v \subset K_{\varepsilon_0}$ et tout $\tau \geqslant \tau_0$,

$$\int e^{-2\tau\psi}\, |v|^2 \leqslant C\int e^{-2\tau\psi}\, |\partial_t v + ib\partial_y v + cv|\, \big(|\partial_y v + c_1 v| + |v|\big)\,. \tag{3.5}$$

3.3. Unicité en dimension deux sous la condition (R)

Nous continuons en donnant une version faible du théorème 1.2 sous la condition (R) lorsque l'espace est $\mathbf{R}^2$.

Théorème 3.4. *Supposons que* $\operatorname{rg}\mathscr{L}(x_0) = 2$ *en un point* $x_0 \in \mathbf{R}^2$. *Si le problème est non caractéristique (en* x_0*), alors pour tout voisinage* ω *de* x_0 *et toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$\left\{\begin{array}{l} (L+c_0)u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega \quad \textit{et} \\ u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}\,, \end{array}\right. \tag{3.6}$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* x_0.

Démonstration. D'après le lemme 1.3, nous pouvons prendre sur $\mathbf{R}^2$ des coordonnées (y, t) telles que:

1. $x_0 = (0, 0)$,

2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$,

3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t)\,\partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

Si $b(0, 0) \neq 0$, nous sommes dans le cas elliptique et le résultat découle du théorème 3.1. Sinon, par l'hypothèse $\operatorname{rg}\mathscr{L}(x_0) = 2$, il existe $k > 0$ tel que $\partial_t^k b(0, 0) \neq 0$ tandis que $\partial_t^j b(0, 0) = 0$ pour $j < k$. Alors, par le théorème de préparation de Malgrange (cf. Hörmander [11, th. 7.5.5]), il existe, pour $(y, t) \in]-Y, Y[\times]-T, T[$ avec $Y > 0$ et $T > 0$, une factorisation

$$b(y, t) = a(y, t)\,\big(t^k + a_{k-1}(y)t^{k-1} + \dots + a_0(y)\big)$$