

## 3.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2 SOUS LA CONDITION (R)

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 3.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2 SOUS LA CONDITION (R)

Dans ce paragraphe, l'espace est  $\mathbf{R}^n$ ,  $n$  entier quelconque.

Commençons par expliciter les hypothèses du théorème 1.2 sous la condition (R); le problème étant non caractéristique, nous pouvons choisir (lemme 1.3) des coordonnées locales  $(y, t)$  telles que :

1.  $x_0 = (0, 0)$ ,
2.  $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$ ,
3.  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$  à un facteur non nul près.

L'intersection de l'ouvert  $\omega$  avec le domaine dans lequel la propriété (R) est vérifiée contient un voisinage de  $(0, 0)$  de la forme  $v \times ]-T, T[$  où  $T > 0$  et  $v$  est un voisinage de 0 dans  $\mathbf{R}^{n-1}$  suffisamment petit pour que  $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$  sur  $S = \{(y, 0) \in \mathbf{R}^n \mid y \in v\}$ . On a  $\text{rg } \mathcal{L} \geq 1$  sur  $S$  puisque  $\partial_t \in \mathcal{L}$ , ce qui entraîne encore que :

1. Pour un point  $(y_0, 0) \in S$  tel que  $\text{rg } \mathcal{L}(y_0, 0) = 1$ , la variété intégrale passant par  $(y_0, 0)$  est  $\{y_0\} \times ]-T, T[$ .
2. Pour un point  $(y_0, 0) \in S$  tel que  $\text{rg } \mathcal{L}(y_0, 0) = 2$ , si la courbe  $\gamma \subset S$  est la trace sur  $S$  de la variété intégrale passant par  $(y_0, 0)$ , cette dernière est  $\gamma \times ]-T, T[$ .

Comme la réunion des traces sur  $S$  des variétés intégrales de  $\mathcal{L}$  est égale à  $S$  par la propriété (R), la réunion des variétés intégrales de  $\mathcal{L}$  coupant  $S$  est égale au voisinage  $v \times ]-T, T[$  tout entier.

Soit  $u \in C^1(\omega)$  une solution du problème (1.2), et supposons qu'il existe un point  $(y_0, t_0) \in v \times ]0, T[$  tel que  $u(y_0, t_0) \neq 0$ . Ce point  $(y_0, t_0)$  est donc situé sur une variété intégrale de  $\mathcal{L}$  coupant  $S$ . Si  $(y_0, t_0)$  est sur une variété intégrale de dimension 1, c'est que  $b(y_0, t) = 0$  pour tout  $t \in ]-T, T[$ , et  $u$  vérifie donc l'équation

$$\partial_t u(y_0, t) + c(y_0, t) u(y_0, t) = 0 \quad \text{pour } t \in ]-T, T[$$

où  $y_0$  n'est plus qu'un paramètre; la théorie des équations différentielles ordinaires nous permet de conclure que  $u(y_0, t) = 0$  pour  $t \in ]0, T[$ , ce qui contredit le fait que  $u(y_0, t_0) \neq 0$ .

Il s'ensuit donc que  $(y_0, t_0)$  est sur une variété intégrale de  $\mathcal{L}$  de dimension 2 que nous noterons  $\mathcal{V}$ . Utilisons  $(z, t)$  comme coordonnées sur  $\mathcal{V}$  où  $z$  est l'abscisse curviligne sur  $\mathcal{V} \cap S$ , et désignons par  $z_0$  l'abscisse du point  $(y_0, t_0)$  dans les coordonnées  $(z, t)$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon] \times ]-T, T[$  soit contenu dans  $\mathcal{V}$ . Comme dans la démonstration du théorème 3.4, nous posons  $\psi(z, t) = t + t_0(z - z_0)^2 \varepsilon^{-2}$  et intro-

duisons les paraboles  $P_\tau$  d'équations  $\psi(z, t) = \tau$ . Nous obtenons ainsi un point  $(z_1, t_1)$  du support de la trace de  $u$  sur  $\mathcal{V}$  tel que  $u = 0$  dans  $\{(z, t) \in \mathcal{V} \mid \psi(z, t) \leq \psi(z_1, t_1)\}$ . Or le problème (pour  $\psi$ ) est non caractéristique en  $(z_1, t_1)$  et  $\text{rg } \mathcal{L}(z_1, t_1) = 2$  puisque nous sommes sur une variété intégrale de  $\mathcal{L}$  de dimension 2. Nous pouvons donc appliquer le théorème 3.4 pour conclure que  $u$  est nulle au voisinage de  $(z_1, t_1)$  sur  $\mathcal{V}$ , ce qui contredit le fait que  $(z_1, t_1)$  est un point du support de la trace de  $u$  sur  $\mathcal{V}$ .

Nous avons donc obtenu que  $u = 0$  dans  $v \times ]-T, T[$ .

### 3.5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2 SOUS LA CONDITION (P)

Comme le problème est non caractéristique, nous pouvons faire usage du lemme 1.3 pour trouver des coordonnées locales  $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ , un voisinage  $v$  de 0 dans  $\mathbf{R}^{n-1}$  et un nombre  $T > 0$  tels que

1.  $x_0 = (0, 0)$ ,
2.  $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$ ,
3.  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$  dans  $v \times ]-T, T[$  à un facteur non nul près,
4.  $v \times ]-T, T[ \subset \omega \cap \Omega$ .

Soit  $u \in C^1(\omega)$  une solution du problème (1.2) et supposons qu'il existe  $(y_0, t_0) \in v \times ]0, T[$  tel que  $u(y_0, t_0) \neq 0$ . Si on avait  $b(y_0, t) = 0$  pour tout  $t \in ]0, t_0[$ , l'équation se réduirait à une équation différentielle ordinaire, ce qui conduirait à une contradiction.

Il existe donc  $t_1 \in ]0, t_0[$  tel que  $b(y_0, t_1) \neq 0$ . Il existe aussi tout un voisinage de  $y_0$  tel que  $b(y, t_1) \neq 0$  pour  $y$  dans ce voisinage, par continuité, et le vecteur

$$d(y) = b(y, t_1) / |b(y, t_1)|$$

est bien défini et régulier au voisinage de  $y_0$ ; par conséquent, le champ réel  $d(y) \cdot \partial_y$  admet en  $y_0$  une courbe intégrale que nous noterons  $\gamma$ .

Comme la condition (P) est vérifiée dans  $v \times ]0, T[$ , nous avons  $b(y, t) = |b(y, t)| d(y)$  pour tout  $(y, t) \in \gamma \times ]0, T[$ , et donc le champ  $L$  est tangent à  $\gamma \times ]0, T[$ ; nous pouvons désormais nous restreindre à  $\gamma \times ]-T, T[$  qui contient le point  $(y_0, t_0)$  où  $u$  ne s'annule pas et sur lequel nous prenons comme coordonnées le couple  $(z, t)$  où  $z$  est l'abscisse curviligne sur  $\gamma$  associée au champ  $d(y) \cdot \partial_y$ ;  $z_0$  désignera l'abscisse du point  $(y_0, t_0)$ .