L'Enseignement Mathématique, t. 32 (1986), p. 57-77

REPRÉSENTATION DE GELFAND-GRAEV ET IDENTITÉS DE BARNES LE CAS DE GL_2 D'UN CORPS FINI

par Anna HELVERSEN-PASOTTO

§ 1. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'expliquer comment l'étude de la représentation de Gelfand-Graev du groupe GL_2 d'un corps fini nous a amenés aux identités de Barnes (i) et (iv) de notre publication [4] de 1978. Une autre approche — par modèles de Weil — a été trouvée par J. Soto Andrade en 1979 et est publiée dans [7]. Cette dernière a été adaptée au cas d'un corps local non-archimédien par W. Li, c.f. [8].

Voici une description de notre méthode: Soit F le corps fini à q éléments et $G = GL(2, F)$ le groupe général linéaire des 2×2 matrices inversibles à coefficients dans F. Pour $b \in F$, posons

$$u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \{u(b) \mid b \in F\} .$$

Soit ψ un caractère additif non-trivial de F à valeurs complexes. On pose $\lambda(u(b)) = \psi(b)$, pour tout $b \in F$, et

$$V = \operatorname{Ind}_U^G(\lambda) ;$$

cette représentation induite porte le nom de « représentation de Gelfand-Graev » dans un cadre plus général, c.f. [9] et [11], et l'on sait que son algèbre d'entrelacement $A = \operatorname{End}_G(V)$ est commutative; elle s'identifie à une sous-algèbre de l'algèbre du groupe $\mathbf{C}[G]$; ici $\mathbf{C}$ désigne le corps des nombres complexes.

Nous décomposons l'algèbre A, suivant les caractères centraux de G, en somme directe de $q - 1$ sous-algèbres A_α et nous déterminons la structure de chaque composante en termes de générateurs et relations; ceci met d'ailleurs la commutativité en évidence. Une première description est donnée en proposition 1, ici les générateurs sont paramétrés par les éléments du groupe multiplicatif du corps F.

Par une « transformation de Mellin », nous introduisons de nouveaux générateurs, paramétrés par les caractères multiplicatifs du corps F. La structure de l'algèbre A_α est donnée par un seul type de relations (5), c.f. théorème 1.

La table des caractères du groupe G nous permet de déterminer les homomorphismes d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$; les relations (5) donnent ainsi lieu à des identités de sommes de Gauss; la série principale (resp. discrète) amène à l'identité (i) (resp. (iv)) de notre publication [4].

Dans une deuxième partie de ce travail (§§ 5 et 6) nous changeons de point de vue:

La démonstration directe des identités (i) et (iv) de notre publication [4], nous permet de nous « débarrasser » de l'usage de la table des caractères de G. Nous parachutons la définition de certains « homomorphismes » en donnant leurs valeurs sur les générateurs et nous démontrons qu'il s'agit effectivement d'homomorphismes d'algèbres de A dans $\mathbf{C}$ en vérifiant que la relation (5) est respectée, ce qui revient à utiliser les identités de Barnes (i) et (iv).

Un calcul de la trace de A_α nous permet ensuite de prouver que les homomorphismes ainsi obtenus constituent une liste complète et sans répétitions des homomorphismes d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$.

Une méthode partiellement analogue a été appliquée au cas de $GL(3, F)$ par B. Chang dans [1]. L'auteur détermine des générateurs et relations pour l'algèbre d'entrelacement A_3 de la représentation de Gelfand-Graev de $GL(3, F)$, mais n'introduit pas de transformation de Mellin dans la suite. Il utilise la table des caractères de $GL(3, F)$ pour déterminer les homomorphismes d'algèbres de A_3 dans $\mathbf{C}$.

Les relations sont vérifiées avec beaucoup de calculs, derrière lesquels se cachent sans doute des identités.

Une méthode différente a été appliquée au cas de $GL(3, F)$ dans ma publication [6] qui ne concerne que le cas de la série discrète. Une transformation de Mellin a été utilisée dans une situation différente, ce qui fait apparaître des identités de sommes de Gauss « du type de Barnes » pour la dimension trois. Ces identités devraient implicitement être contenues dans la partie des calculs de Chang concernant la série discrète.

Comme en témoignent plus en détail les introductions de [4], [5] et [6], une grande partie des idées sous-jacentes à ce travail est due à P. Cartier.

§ 2. Représentation de Gelfand-Graev de G et décomposition de son algèbre d'entrelacement A suivant les caractères centraux de G

Nous gardons les notations de l'introduction, F désigne le corps fini à q éléments, $F^\times$(resp. F^+) désigne le groupe multiplicatif (resp. additif) de F et $G = GL(2, F)$. Nous fixons, une fois pour toutes, un caractère non-trivial ψ de F^+. La représentation de Gelfand-Graev V de G est définie par

$$V = \mathrm{Ind}_U^G(\lambda)\,,$$

où $U = \{u(b) \mid b \in F^+\}$, $u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour $b \in F$, et $\lambda(u(b)) = \psi(b)$, pour tout $b \in F$. Nous allons étudier la structure de l'algèbre d'entrelacement $A = \mathrm{End}_G(V)$. A ce propos, il est commode de travailler avec des idempotents dans l'algèbre $\mathbf{C}[G]$ du groupe G.

Posons $e_\lambda := q^{-1} \sum_{u \in U} \lambda(u^{-1})u$. On a $e_\lambda^2 = e_\lambda$ et $u\, e_\lambda = \lambda(u) e_\lambda = e_\lambda\, u$, pour tout $u \in U$. La représentation induite V se réalise dans l'idéal à gauche $\mathbf{C}[G]e_\lambda$ engendré par l'idempotent e_λ et l'algèbre d'entrelacement A s'identifie à la sous-algèbre $e_\lambda \mathbf{C}[G] e_\lambda$ de l'algèbre du groupe.

Soit X le groupe des caractères de $F^\times$. Pour $\alpha \in X$, on définit un caractère du centre C de G, qu'on désignera par le même symbole α, en posant

$$c(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha(c(a)) = \alpha(a), \quad \text{pour} \quad a \in F^\times\,.$$

Posons

$$e_\alpha := (q-1)^{-1} \sum_{c \in C} \alpha(c^{-1})c, \quad \text{pour} \quad \alpha \in X\,.$$

On remarque que

$$e_\alpha^2 = e_\alpha,\, e_\alpha\, e_{\alpha'} = 0, \quad \text{si} \quad \alpha \neq \alpha', \alpha, \alpha' \in X$$

et que

$$\sum_{\alpha \in X} e_\alpha = 1\,;$$

i.e. les e_α, $\alpha \in X$, forment un système d'idempotents, deux à deux orthogonaux, de somme 1. Chaque e_α, $\alpha \in X$, est un idempotent central, i.e. e_α est dans le centre de l'algèbre du groupe. Posons

$$H = CU .$$

On définit un caractère $\alpha\lambda$ de H par

$$(\alpha\lambda)(cu) = \alpha(c)\,\lambda(u), \quad \text{pour} \quad c \in C, u \in U .$$

Posons

$$V_\alpha = \operatorname{Ind}_H^G(\alpha\lambda), \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in X ;$$

cette représentation induite se réalise dans l'idéal à gauche $\mathbf{C}[G]\,e_\alpha e_\lambda$ et l'on a

$$V = \bigoplus_{\alpha \in X} V_\alpha .$$

L'algèbre d'entrelacement A_α de V_α s'identifie à l'algèbre $e_\alpha e_\lambda \mathbf{C}[G] e_\alpha e_\lambda$ qui est égale à $e_\lambda \mathbf{C}[G] e_\alpha e_\lambda$, d'où

$$A = \bigoplus_{\alpha \in X} A_\alpha .$$

Dans la suite, on se fixe un caractère central α et l'on étudie l'algèbre A_α.

§ 3. Description de A_α en termes de générateurs et relations

Posons $e = e_\theta$ avec $\theta = \alpha\lambda$, on a alors $A_\alpha = e\,\mathbf{C}[G]\,e = \operatorname{End}_G(\operatorname{Ind}_H^G(\theta))$. Soit R un système de représentants des doubles classes de G suivant H. On sait que l'ensemble

$$B = \{ere \mid r \in R, ere \neq 0\}$$

forme une base de A_α en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. Pour $h, h' \in H$, $r \in R$, l'on a

$$e\,hrh'e = \theta(hh')\,ere .$$

Pour tout $g \in G$, on définit un caractère $g\theta$ de $g\,H\,g^{-1}$ par $(g\theta)(x) = \theta(g^{-1}xg)$, si $x \in g\,Hg^{-1}$. On sait que, pour tout $g \in G$, la condition $ege \neq 0$ équivaut à

$$\theta/_{H \cap gHg^{-1}} = g\,\theta/_{H \cap gHg^{-1}} .$$

Rappelons que

$$u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pour} \quad b \in F^+, c(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \text{pour} \quad a \in F^\times ,$$

$U = \{u(b) \mid b \in F^+\}$ et $C = \{c(a) \mid a \in F^\times\}$ et introduisons, en plus, les notations suivantes:

$$d(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pour} \quad a \in F^\times, D = \{d(a) \mid a \in F^\times\} \quad \text{et} \quad z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a la décomposition de Bruhat

(1) $$G = C\, U\, D \;\cup\; C\, U\, D\, z\, U$$

et on vérifie facilement qu'on a, parmi d'autres, les relations suivantes,

(2) $$d(a)\, u(b) = u(ab)\, d(a), a \in F^\times, b \in F^+ ,$$

(3) $$z\, u(a)\, z = c(a)\, d(-a^{-2})\, u(-a)\, z\, u(a^{-1}), a \in F^\times ,$$

qui nous servirons dans la suite.

La réunion de D et Dz forme un système de représentants des doubles classes de G suivant $H = CU$, comme on le remarque à l'aide de (1). On calcule

$$\begin{aligned} (d(a)\theta)\,(c\, u(b)) &= \theta(d(a^{-1})\, c\, u(b) d(a)) \\ &= \theta(c\, u(a^{-1}b)), \qquad \text{d'après (2),} \\ &= \alpha(c)\, \psi(a^{-1}b) , \end{aligned}$$

pour $a \in F^\times, c \in C$ et $b \in F^+$. Or $d\, H\, d^{-1} = H$, pour tout $d \in D$ et le calcul précédent montre que, pour $d \in D$,

$$\theta/_H = d\theta/_H \quad \text{si et seulement si} \quad d = 1 .$$

Pour $d \in D$, on a donc $ede \neq 0$, si et seulement si $d = 1$. Examinons maintenant le cas d'un représentant $r \in Dz$; on a $r = d(a)z$, avec $a \in F^\times$, et

$$r\, H\, r^{-1} = d(a)z\, CU\, zd(a^{-1}) = C\, z\, U\, z = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\, a \in F^\times, b \in F^+ \right\},$$

d'où

$$H \cap r\, H\, r^{-1} = C .$$

Mais $\theta/_C = dz\, \theta/_C$ pour tout $d \in D$. On a donc $edze \neq 0$, pour tout $d \in D$. Posons $B = \{e\} \cup \{e\, dze \mid d \in D\}$. Alors B est une base de l'espace vectoriel sous-jacent à A_α. En particulier, on a

$$\dim_{\mathbf{C}}(A_\alpha) = q \qquad \text{et donc} \qquad \dim_{\mathbf{C}}(A) = q(q-1)\,;$$

cela correspond bien aux résultats plus généraux de [9] et [11].

L'élément e est l'unité de l'algèbre A_α, dans la suite on le désignera aussi par 1; pour tout $a \in F^\times$, on pose

$$b(a) = e\, d(a)\, z\, e\,.$$

On définit le symbole de Kronecker δ pour $a \in F^\times$ par

$$\delta(a) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a = 1\,, \\ 0 & \text{si} \quad a \neq 1\,. \end{cases}$$

PROPOSITION 1. *L'unité et les éléments $b(a)$, avec $a \in F^\times$, forment une base de l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre A_α. La structure d'algèbre s'exprime par la relation suivante:*

$$(4) \qquad b(a_1)b(a_2)$$
$$= q^{-1}\,\delta(a_1 a_2^{-1})\,\alpha(a_1) + q^{-1}\sum_a \psi(a(a_1+a_2)-a^{-1})\alpha(a^{-1})b(-a^2 a_1 a_2)\,,$$

où l'on somme sur tous les $a \in F^\times$ et où $a_1, a_2 \in F^\times$.

En effet, on a, pour $a_1, a_2 \in F^\times$,

$$\begin{aligned} b(a_1)b(a_2) &= ed(a_1)z\, ed(a_2)ze = ed(a_1)ze_\lambda d(a_2)ze \\ &= q^{-1}\sum_b ed(a_1)z\psi(-b)u(b)d(a_2)ze \quad (b \in F_q^+) \\ &= q^{-1}ec(a_2)d(a_1\, a_2^{-1})e + q^{-1}\sum_a \psi(-a)\, ed(a_1)zu(a)d(a_2)ze\,, \end{aligned}$$

$a \in F^\times$. Mais $c(a_2)e_\alpha = \alpha(a_2)e_\alpha$ et

$$d(a_1)zu(a)d(a_2)z = c(a)u(a^{-1}a_1)d(-a^2 a_1 a_2)zu(a^{-1}a_2)\,,$$

d'après (2) et (3). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &b(a_1)b(a_2) \\ &\quad = q^{-1}\,\delta(a_1^{-1}a_2)\alpha(a_1) + q^{-1}\sum_a \psi(-a+a^{-1}(a_1+a_2))\alpha(a)ed(-a^{-2}a_1a_2)ze \\ &\quad = q^{-1}\,\delta(a_1^{-1}\, a_2)\alpha(a_1) + q^{-1}\sum_a \psi(a(a_1+a_2)-a^{-1})\alpha(a^{-1})b(-a^2a_1a_2)\,, \end{aligned}$$

où l'on somme sur $a \in F^\times$. C.Q.F.D.

On remarque en particulier que l'algèbre A est commutative, ce qui correspond bien à la théorie générale, c.f. [9], [11].

Par une « transformation de Mellin », on introduit de nouveaux générateurs $b(\gamma)$ de A_α: on pose

$$b(\gamma) = (q-1)^{-1} \sum_a \gamma(a) b(a), \; a \in F^\times, \gamma \in X .$$

On a la formule d'inversion

$$b(a) = \sum_\gamma \gamma(a^{-1})\, b(\gamma)$$

où l'on somme sur $\gamma \in X$.

La relation (4) se transforme de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
& b(\gamma_1)(\gamma_2) \\
&= (q-1)^{-2} \sum_{a_1, a_2} \gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2)\, b(a_1)b(a_2), \quad a_1, a_2 \in F^\times , \\
&= q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_a (\alpha\gamma_1\gamma_2)(a) \\
&+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2} \psi(a(a_1+a_2)-a^{-1})\alpha(a^{-1})\gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2)b(-a^2a_1a_2) \\
&= q^{-1}(q-1)^{-1}\, \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\
&+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2, \gamma} \psi(a(a_1+a_2)-a^{-1})\alpha(a^{-1})\gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2)\gamma(-a^{-2}a_1^{-1}a_2^{-1})b(\gamma) \\
&= q^{-1}(q-1)^{-1}\, \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\
&+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2, \gamma} \psi(a_1+a_2+a)\,(\alpha\gamma\gamma_1\gamma_2)(-1) \\
&\quad (\alpha\gamma_1\gamma_2)(a)\,(\gamma_1\gamma^{-1})(a_1)\,(\gamma_2\gamma^{-1})(a_2)b(\gamma) \\
&= q^{-1}(q-1)^{-1}\, \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\
&+ q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1\gamma_2)(-1)g(\alpha\gamma_1\gamma_2) \sum_\gamma \gamma(-1)g(\gamma_1\gamma^{-1})g(\gamma_2\gamma^{-1})b(\gamma) ;
\end{aligned}$$

ici l'on somme sur $a, a_1, a_2 \in F^\times$ et $\gamma \in X$. Le symbole de Kronecker δ est défini, pour $\beta \in X$, par

$$\delta(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \beta = 1 , \\ 0 & \text{si} \quad \beta \neq 1 . \end{cases}$$

La somme de Gauss $g(\beta)$ est définie, pour tout $\beta \in X$, par

$$g(\beta) = \sum_a \psi(a)\, \beta(a), \; a \in F^\times .$$

Le résultat des calculs ci-dessus s'énonce maintenant sous la forme suivante:

THÉORÈME 1. *L'unité et les éléments* $b(\gamma)$, *avec* $\gamma \in X$, *forment une base de l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre* A_α. *La structure d'algèbre s'exprime par la relation suivante:*

$$(5) \qquad b(\gamma_1)\, b(\gamma_2) = q^{-1}(q-1)^{-1}\, \delta(\alpha\gamma_1\, \gamma_2)$$
$$+\ q^{-1}(q-1)^{-2}\, (\alpha\gamma_1\gamma_2)\,(-1)\, g(\alpha\gamma_1\gamma_2) \sum_{\gamma} \gamma(-1)\, g(\gamma_1\gamma^{-1}) g(\gamma_2\gamma^{-1}) b(\gamma)$$

pour $\gamma_1, \gamma_2 \in X$; *on somme sur* $\gamma \in X$.

§ 4. RAPPEL DE LA TABLE DES CARACTÈRES DE G CALCUL DES VALEURS DES CARACTÈRES DE G SUR LES GÉNÉRATEURS DE A_α

Les caractères sont en « dualité » avec les classes de conjugaison. Correspondant aux quatre « types » de telles classes, il y a quatre « séries » de caractères. Toute la situation se résume dans le tableau suivant:

		caractères	χ^1_μ	χ^q_μ	$\chi_{\mu,\upsilon}$	χ_Λ
classes de conjugaison		para-mètres	$\mu \in X$	$\mu \in X$	$\mu, \upsilon \in X$ $\mu \neq \upsilon$ modulo $(\mu, \upsilon) \sim (\upsilon, \mu)$	$\Lambda \in Y$ modulo $\Lambda \sim \Lambda^q$
repré-sentant	diviseurs élémentaires					
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$X-a$ $X-a$	$a \in F^\times$	$\mu^2(a)$	$q\,\mu^2(a)$	$(q+1)\,\mu\upsilon(a)$	$(q-1)\,\Lambda(a)$
$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$	1 $(X-a)^2$	$a \in F^\times$	$\mu^2(a)$	0	$\mu\upsilon(a)$	$-\Lambda(a)$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$	1 $(X-a)(X-d)$	$a, d \in F^\times$ $a \neq d$ modulo $(a, d) \sim (d, a)$	$\mu(ad)$	$\mu(ad)$	$\mu(a)\,\upsilon(d)$ $+\,\mu(d)\,\upsilon(a)$	0
$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{N}(x) \\ -1 & \mathrm{Tr}(x) \end{pmatrix}$	1 $X^2 - \mathrm{Tr}(x)X + \mathrm{N}(x)$	$x \in E^\times$ $x \notin F^\times$ modulo $x \sim x^q$	$\mu(\mathrm{N}(x))$	$-\mu(\mathrm{N}(x))$	0	$-(\Lambda+\Lambda^q)(x)$

Ici E désigne le corps fini a q^2 éléments, Tr (resp. N) dénote la trace (resp. norme) de E sur F, i.e. pour $x \in E$, on a

$$\mathrm{Tr}(x) = x + x^q \quad \text{et} \quad \mathrm{N}(x) = x\,x^q,$$

Y désigne le groupe des caractères de $E^\times$.

Une des nombreuses références pour le calcul des caractères de G est [9].

Pour tout caractère χ de G, nous désignons aussi par χ l'extension par linéarité de χ à $\mathbf{C}\,[G]$ et nous nous proposons d'en calculer la restriction à la sous-algèbre A_α. Pour l'unité e de A_α, on obtient

$$\chi(e) = \chi(e_\theta) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \theta(h^{-1})\,\chi(h) = <\theta, \mathrm{Res}_H^G\,\chi> = <\mathrm{Ind}_H^G\,\theta, \chi>$$

et d'une manière explicite:

$$\chi(e) = q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a,b} \bar{\alpha}(a)\,\bar{\psi}(b)\,\chi\big(c(a)\,u(b)\big), \quad a \in F^\times, b \in F^+;$$

or la suite des diviseurs élémentaires de $c(a)\,u(b)$ est $1, (X-a)^2$, si $b \neq 0$, et $X - a, X - a$, si $b = 0$, pour $a \in F^\times$, $b \in F^+$, d'où:

$$\chi(e) = q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a, b \neq 0} \bar{\alpha}(a)\,\bar{\psi}(b)\,\chi\big(1, (X-a)^2\big) + \sum_a \bar{\alpha}(a)\,\chi(X-a, X-a)\big)$$

$a, b \in F$; mais ψ étant un caractère non-trivial de F^+, on a

$$\sum_{b \neq 0} \psi(b) = -1, b \in F, \qquad \text{d'où}$$

$$\chi(e) = q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_a \bar{\alpha}(a)\,\big[\chi(X-a, X-a) - \chi\big(1, (X-a)^2\big)\big], \quad a \in F^\times.$$

En utilisant la table des caractères, on obtient, pour $\mu, \upsilon \in X$,

$$\chi_\mu^1(e) = 0, \chi_\mu^q(e) = \delta(\alpha^{-1}\,\mu^2), \chi_{\mu,\upsilon}(e) = \delta(\alpha^{-1}\mu\upsilon)$$

et $\chi_\Lambda(e) = \delta(\alpha^{-1}\lambda)$, où λ dénote la restriction de Λ à $F^\times$, pour $\Lambda \in Y$.

D'après [2], Corollaire 1.2, les homomorphismes d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$ sont donnés par les caractères χ de G, tels que $\chi(e) = 1$. Nous calculons, dans la suite, leurs valeurs sur les générateurs $b(\gamma)$ de A_α avec $\gamma \in X$.

LEMME 1. *Soit* χ *un caractère de* G *et* $\gamma \in X$; *on a*

$$\begin{aligned}&\chi\big(b(\gamma)\big)\\ &= q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1) \sum_{\substack{a, c \in F^\times \\ b \in F^+}} (\alpha^{-1}\gamma^{-2})\,(a)\,\gamma(c)\,\bar{\psi}(a^{-1}b)\,\chi(1, X^2 - bX + c),\end{aligned}$$

ici α *dénote le caractère central fixé.*

En effet, on a $\chi(b(\gamma)) = (q-1)^{-1} \sum_a \gamma(a)\chi(a), \quad a \in F^\times$.

Or

$$b(a) = ed(a)ze = q^{-2}(q-1)^{-2} \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} \alpha(a_1 a_2)\, \psi(b_1+b_2)c(a_1)u(b_1)d(a)zc(a_2)u(b_2)$$

$$= q^{-2}(q-1)^{-1} \sum_{a_1, b_1, b_2} \bar{\alpha}(a_1)\, \bar{\psi}(b_1+b_2)\, c(a_1)\, u(b_1)\, d(a)zu(b_2),\ a_1, a_2 \in F^\times, b_1, b_2 \in F^+.$$

La suite des diviseurs élémentaires de $c(a_1)\,u(b_1)\,d(a)\,z\,u(b_2)$ est égale à $1, X^2 - a_1(b_1+b_2)X - a_1^2 a$, pour $a_1, a \in F^\times, b_1, b_2 \in F^+$, d'où

$$\chi(b(a)) = q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a_1, b} \bar{\alpha}(a_1)\, \bar{\psi}(b)\, \chi(1, X^2 - a_1 bX - a_1^2 a),\ a_1 \in F^\times, b \in F^+ .$$

$$= q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a_1, b} \bar{\alpha}(a_1)\, \bar{\psi}(a_1^{-1} b)\, \chi(1, X^2 - bX - a_1^2 a),\ a_1 \in F^\times, b \in F^+.$$

On obtient donc

$$\chi(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, b} \alpha(a_1^{-1})\, \gamma(a)\, \bar{\psi}(a_1^{-1} b)\, \chi(1, X^2 - bX - a_1^2 a),\ a, a_1 \in F^\times, b \in F$$

$$= q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a_1, c, b} \alpha(a_1^{-1})\, \gamma(-a_1^{-2} c)\, \bar{\psi}(a_1^{-1} b)\, \chi(1, X^2 - bX + c)$$

$$= q^{-1}(q-1)^{-2}\, \gamma(-1) \sum_{a, c, b} (\alpha^{-1}\gamma^{-2})(a)\, \gamma(c)\, \bar{\psi}(a^{-1} b)\, \chi(1, X^2 - bX + c),$$

ce qui prouve le lemme 1.

PROPOSITION 2. *Les valeurs des caractères de G sur les générateurs de A sont données par:*

$$\chi_\mu^1(e) = \chi_\mu^1(b(\gamma)) = 0,$$

$$\chi_\mu^q(e) = \delta(\alpha^{-1}\mu^2),\ \chi_\mu^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-1}\delta(\alpha^{-1}\mu^2)\, \gamma(-1)\, g(\gamma\mu)^2,$$

$$\chi_{\mu,\upsilon}(e) = \delta(\alpha^{-1}\mu\upsilon),\ \chi_{\mu,\upsilon}(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-1}\delta(\alpha^{-1}\mu\upsilon)\, (\alpha\gamma)(-1)\, g(\gamma\mu)\, g(\gamma\upsilon),$$

$$\chi_\Lambda(e) = \delta(\alpha^{-1}\lambda),\ \chi_\Lambda(b(\gamma)) = -q^{-1}(q-1)^{-1}\, \delta(\alpha^{-1}\lambda)\, (\alpha\gamma)(-1)\, G(\gamma^*\Lambda);$$

ici $\mu, \upsilon, \gamma \in X$, α caractère central fixé, $\Lambda \in Y$; λ dénote la restriction de Λ à $F^\times$ et γ^* dénote le composé de γ avec la norme de $E^\times$ sur $F^\times$; la somme de Gauss $G(\Lambda\gamma^*)$ est définie par

$$G(\Lambda\gamma^*) = \sum_{x \in E^\times} (\Lambda\gamma^*)(x)\, \psi(\mathrm{Tr}(x)).$$

Démonstration. Les valeurs sur l'unité e ont déjà été calculées au début du paragraphe. De $\chi_\mu^1(1, X^2 - bX + c) = \mu(c)$, pour tout $b \in F^+$, $c \in F^\times$, $\mu \in X$ on déduit que $\chi_\mu^1(b(\gamma)) = 0$, pour tout $\gamma \in X$.

D'après le lemme 1, on obtient

$$\chi_{\mu}^{q}(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1) \sum_{a,c,b} (\alpha^{-1}\gamma^{-2})(a)\gamma(c)\,\bar{\psi}(a^{-1}b)\,\chi_{\mu}^{q}(1, X^2-bX+c)\,;$$

d'après la table des caractères, on a

$$\chi_{\mu}^{q}(1, X^2-bX+c) = \begin{cases} 0 & \\ \mu(a_1a_2) & \text{si} \quad X^2-bX+c \\ -\mu(\mathrm{N}(x)) & \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (X-a)^2 & \text{avec} \quad a \in F^{\times} \\ (X-a_1(X-a_2)) & \text{avec} \quad a_1, a_2 \in F^{\times}, a_1 \neq a_2 \\ (X-x)(X-x^q) & \text{avec} \quad x \in E^{\times} - F^{\times} \end{cases}$$

d'où

$$\chi_{\mu}^{q}(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1)\frac{1}{2} \sum_{\substack{a \\ a_1 \neq a_2}} (\alpha^{-1}\gamma^{-2}(a))\,\gamma(a_1a_2)\,\bar{\psi}(a^{-1}(a_1+a_2))\,\mu(a_1\,a_2)$$

$$- q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1)\frac{1}{2} \sum_{\substack{a \\ x \neq x^q}} (\alpha^{-1}\gamma^{-2})(a)\,\gamma(\mathrm{N}(x))\,\bar{\psi}(a^{-1}\mathrm{Tr}(x))\mu(\mathrm{N}(x))\,,$$

ici l'on somme sur a, a_1, $a_2 \in F^{\times}$ et $x \in E^{\times}$. On ne change rien à la valeur de $\chi_{\mu}^{q}(b(\gamma))$ si dans les sommations on enlève la restriction $a_1 \neq a_2$ et $x \neq x^q$. Après un changement d'indices de sommation, l'on obtient

$$\chi_{\mu}^{q}(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1)\frac{1}{2}\Big(\sum_{a,a_1,a_2} (\alpha^{-1}\mu^2)(a)\,\gamma(a_1a_2)\,\psi(a_1+a_2)\,\mu(a_1a_2)$$

$$- \sum_{a,x} (\alpha^{-1}\mu^2)(a)\,\gamma(\mathrm{N}(x))\psi(\mathrm{Tr}(x))\,\mu(\mathrm{N}(x))\Big),\ a, a_1, a_2 \in F^{\times}, x \in E^{\times}\,,$$

$$= q^{-1}(q-1)^{-1}\,\gamma(-1)\,\delta(\alpha^{-1}\mu^2)\frac{1}{2}\,[g(\gamma\mu)^2 - G((\gamma\mu)^*)]\,,$$

où $G((\gamma\mu)^*) = \sum_{x \in E^{\times}} (\gamma\mu)(\mathrm{N}(x))\,\psi(\mathrm{Tr}(x))$. D'après le théorème de Davenport et Hasse [3], on a $G((\gamma\mu)^*) = -g(\gamma\mu)^2$, d'où

$$\chi_{\mu}^{q}(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-1}\,\gamma(-1)\,\delta(\alpha^{-1}\mu^2)\,g(\gamma\mu)^2\,.$$

Le calcul de $\chi_{\mu,\upsilon}(b(\gamma))$ est plus facile, on obtient, d'après le lemme 1 et la table des caractères

$$\chi_{\mu,\upsilon}(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1)\sum_{a,a_1,a_2}(\alpha^{-1}\gamma^{-2})(a)\,\gamma(a_1a_2)\,\bar{\psi}(a^{-1}(a_1+a_2))\,\mu(a_1)\,\upsilon$$

$a, a_1, a_2 \in F^\times$,

$$= q^{-1}(q-1)^{-2}(\gamma\mu\upsilon)(-1)\sum_{a,c_1,c_2}(\alpha^{-1}\mu\upsilon)(a)\,(\gamma\mu)(c_1)\,(\gamma\upsilon)(c_1)\,\psi(c_1+c_2),$$

$a, c_1, c_2 \in F^\times$,

$$= q^{-1}(q-1)^{-1}(\alpha\gamma)(-1)\,\delta(\alpha^{-1}\mu\upsilon)\,g(\gamma\mu)\,g(\gamma\upsilon)\,;$$

le calcul de $\chi_\Lambda(b(\gamma))$ est analogue et est laissé au lecteur. La démonstration de la proposition 2 est ainsi terminée.

Remarque 1. Soit χ un caractère de G tel que $\chi(e) = 1$. Un tel caractère définit un homomorphisme d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$, comme on l'a déjà remarqué, c.f. [2]. On a donc

$$\chi(b(\gamma_1))\,\chi(b(\gamma_2)) = \chi(b(\gamma_1)b(\gamma_2)),$$

pour γ_1, $\gamma_2 \in X$, et la relation (5) du théorème 1 donne ainsi lieu à l'identité suivante:

$$(5)^\chi \qquad \chi(b(\gamma_1))\,\chi(b(\gamma_2)) = q^{-1}(q-1)^{-1}\,\delta(\alpha\gamma_1\gamma_2)$$
$$+\, q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1\gamma_2)(-1)\,g(\alpha\gamma_1\gamma_2)\sum_\gamma \gamma(-1)\,g(\gamma_1\gamma^{-1})\,g(\gamma_2\gamma^{-1})\,\chi(b(\gamma))$$

pour γ_1, $\gamma_2 \in X$, sommation sur $\gamma \in X$.

Remarque 2. En spécialisant la remarque 1, pour $\chi = \chi_\mu^q$ (resp. $\chi = \chi_{\mu,\nu}$, resp. $\chi = \chi_\Lambda$) avec $\mu \in X$ tel que $\mu^2 = \alpha$ (resp. avec $\mu, \nu \in X$ tels que $\mu \neq \nu$ et $\mu\nu = \alpha$, resp. avec $\Lambda \in Y$ tel que $\Lambda \neq \Lambda^q$ et $\lambda = \alpha$) et en appliquant la proposition 2, on obtient les identités suivantes:

$$(5)_\mu^q \qquad g(\gamma_1\mu)^2\,g(\gamma_2\mu)^2 = q(q-1)\,\delta(\gamma_1\gamma_2\mu^2)$$
$$+\,(q-1)^{-1}\,g(\gamma_1\gamma_2\mu^2)\sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\,g(\gamma_2\gamma^{-1})\,g(\mu\gamma)^2\,,\,.$$

resp.

$$(5)_{\mu,\nu} \qquad g(\gamma_1\mu)\,g(\gamma_1\nu)\,g(\gamma_2\mu)\,g(\gamma_2\nu) = q(q-1)\,\delta(\gamma_1\gamma_2\mu\nu)\,(\mu\nu)(-1)$$
$$+\,(q-1)^{-1}\,g(\gamma_1\gamma_2\mu\nu)\sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\,g(\gamma_2\gamma^{-1})\,g(\mu\gamma)\,g(\nu\gamma)\,,$$

resp.

$$(5)_\Lambda \qquad G(\gamma_1^*\Lambda)\,G(\gamma_2^*\Lambda) = q(q-1)\,\delta(\gamma_1\gamma_2\lambda)\,\lambda(-1)$$
$$-\,(q-1)^{-1}\,g(\gamma_1\gamma_2\lambda)\sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\,g(\gamma_2\gamma^{-1})\,G(\gamma^*\Lambda)\,,$$

pour γ_1, $\gamma_2 \in X$, sommation sur $\gamma \in X$.

Remarque 3. On observe que les identités $(5)_{\mu,\nu}$ [resp. $(5)_\Lambda$] considérées pour tous les $\mu, \nu \in X$ [resp. $\Lambda \in Y$] contiennent l'identité $(5)_\mu^q$ comme cas particulier « dégénéré », correspondant à $\mu = \nu$ [resp. $\Lambda = \Lambda^q$, $\Lambda = \mu \circ N$].

Remarque 4. Pour tout $\beta \in X$, on a $\delta(\beta)\, g(\beta) = -1$. Les identités peuvent donc s'énoncer sous la forme suivante:

$$(5)_{\mu,\nu} \qquad (q-1)^{-1} \sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\, g(\gamma_2\gamma^{-1})\, g(\mu\gamma)\, g(\nu\gamma)$$

$$= \frac{g(\gamma_1\mu)\, g(\gamma_1\nu)\, g(\gamma_2\mu)\, g(\gamma_2\nu)}{g(\gamma_1\gamma_2\mu\nu)} + q(q-1)\, \delta(\gamma_1\gamma_2\mu\nu)\, (\mu\nu)\, (-1)\,,$$

pour tous $\gamma_1, \gamma_2, \mu, \nu \in X$, sommation sur $\gamma \in X$, et

$$(5)_\Lambda \qquad -(q-1)^{-1} \sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\, g(\gamma_2\gamma^{-1})\, G(\gamma^*\Lambda)$$

$$= \frac{G(\gamma_1^*\Lambda)\, G(\gamma_2^*\Lambda)}{g(\gamma_1\gamma_2\lambda)} + q(q-1)\, \delta(\gamma_1\gamma_2\lambda)\, \lambda(-1)\,,$$

pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in X, \Lambda \in Y$, sommation sur $\gamma \in X$, λ dénote la restriction de Λ à $F^\times$.

Nous reconnaissons ainsi les identités (i) et (iv) du théorème 1 de notre publication [4], dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous, et nous voyons bien comment la série principale (resp. discrète) de caractères $\chi_{\mu,\nu}$ (resp. χ_Λ) amène aux identités de Barnes (i) (resp. (iv)). Ceci termine la première partie de cet article.

Rappel du théorème 1 de [4]. *Soit F (resp. F_2, resp. F_4) le corps fini à q (resp. q^2, resp. q^4) éléments; on note $F_2^\times$ (resp. $F_4^\times$) le groupe multiplicatif de F_2 (resp. F_4), et on se fixe un caractère non-trivial* exp *du groupe additif F^+. Pour un caractère α de $F^\times$, on pose*

$$G_1(\alpha) = g(\alpha) = \sum_a \alpha(a) \exp(a)\,,$$

où l'on somme sur tous les $a \in F^\times$. On note Tr_2 *(resp.* Tr_4*) la trace de F_2 (resp. F_4) sur F, et l'on note* N *(resp.* $\mathrm{N}_{4/2}$*) la norme de F_2 sur F (resp. F_4 sur F_2). Pour un caractère Λ de $F_2^\times$, on note $G_2(\Lambda)$ la somme de Gauss suivante*

$$G_2(\Lambda) = \sum_x \Lambda(x) \exp(\mathrm{Tr}_2(x))\,,$$

où l'on somme sur tous les $x \in F_2^\times$. *De manière analogue, pour un caractère* Φ *de* $F_4^\times$, *on pose*

$$G_4(\Phi) = \sum_z \Phi(z) \exp\left(\mathrm{Tr}_4(z)\right),$$

où l'on somme sur tous les $z \in F_4^\times$. *On a les cinq identités suivantes:*

(i) *Pour quatre caractères* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *de* $F^\times$, *on a*

$$(q-1)^{-1} \sum_\alpha g(\alpha_1\alpha)\, g(\alpha_2\alpha^{-1})\, g(\alpha_3\alpha)\, g(\alpha_4\alpha^{-1})$$
$$= \frac{g(\alpha_1\alpha_2)\, g(\alpha_2\alpha_3)\, g(\alpha_3\alpha_4)\, g(\alpha_4\alpha_1)}{g(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)} + q(q-1)\, \delta(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)\, (\alpha_1\alpha_3)\, (-1),$$

ici l'on somme sur les caractères α *de* $F^\times$;

(ii) *pour un caractère* Φ *de* $F_4^\times$, *on a*

$$-(q+1)^{-1} \sum_\Lambda G_4\left(\Phi(\Lambda \circ \mathrm{N}_{4/2})\right) = \frac{G_4(\Phi^{q+1})}{g(\varphi)} + q(q-1)\, \delta(\varphi)\, \Phi(\varepsilon_0),$$

ici l'on somme sur les caractères Λ *de* $F_2^\times$ *dont la restriction à* $F^\times$ *soit triviale,* ε_0 *dénote un élément de* F_2 *tel que* $\varepsilon_0^{q-1} = -1$; φ *dénote la restriction de* Φ *à* $F^\times$;

(iii) *pour* Λ_1, Λ_2 *caractères de* $F_2^\times$, *on a*

$$(q-1)^{-1} \sum_\alpha G_2\left(\Lambda_1(\alpha \circ \mathrm{N})\right) G_2\left(\Lambda_2(\alpha \circ \mathrm{N})^{-1}\right)$$
$$= \frac{G_2(\Lambda_1\Lambda_2)\, G_2(\Lambda_1\Lambda_2^q)}{g(\lambda_1\lambda_2)} + q(q-1)\, \delta(\lambda_1\lambda_2)\, \lambda_1(-1),$$

ici λ_1 *(resp.* λ_2*) désigne la restriction de* Λ_1 *(resp.* Λ_2*) à* $F^\times$, *l'on somme sur tous les caractères* α *de* $F^\times$;

(iv) *pour* α_1, α_2 *caractères de* $F^\times$, Λ *caractère de* $F_2^\times$, *on a*

$$-(q-1)^{-1} \sum_\alpha g(\alpha_1\alpha)\, g(\alpha_2\alpha)\, G_2\left(\Lambda(\alpha \circ \mathrm{N})^{-1}\right)$$
$$= \frac{G_2\left(\Lambda(\alpha_1 \circ \mathrm{N})\right) G_2\left(\Lambda(\alpha_2 \circ \mathrm{N})\right)}{g(\alpha_1\alpha_2\lambda)} + q(q-1)\, \delta(\alpha_1\alpha_2\lambda)\, \lambda(-1),$$

ici λ *désigne la restriction de* Λ *à* $F^\times$, *l'on somme sur tous les caractères* α *de* $F^\times$;

(v) *pour* Λ_1, Λ_2 *caractères de* $F_2^\times$, *on a*

$$(q+1)^{-1} \sum_{\Lambda} G_2(\Lambda_1\Lambda)\, G_2(\Lambda_2\Lambda)$$

$$= \frac{g(\lambda_1)\, g(\lambda_2)\, G_2(\Lambda_1\Lambda_2)}{g(\lambda_1\lambda_2)} + q(q-1)\, \delta(\lambda_1\lambda_2)\, \lambda_1(-1)\, (\Lambda_1\Lambda_2)\, (\varepsilon_0)\,,$$

ici λ_1 *(resp.* λ_2*) dénote la restriction de* Λ_1 *(resp.* Λ_2*) à* $F^\times$, *l'on somme sur les caractères* Λ *de* $F_2^\times$ *dont la restriction à* $F^\times$ *soit triviale,* ε_0 *désigne un élément de* $F_2^\times$ *tel que* $\varepsilon_0^{q-1} = -1$.

Les cinq identités sont des cas particuliers d'une identité plus générale qui fait l'objet du théorème 2 de notre publication [4]. La démonstration se base sur l'étude de certaines algèbres commutatives de degré 4 sur F et fait intervenir le groupe symétrique des permutations de quatre éléments ainsi que le groupe diédrale D_4 du carré. L'identité générale s'énonce pour chaque $\sigma \in D_4$, mais elle ne dépend que de la classe de conjugaison de σ. Les cinq classes de conjugaison de D_4 fournissent les cinq identités de Barnes.

Dans la suite de cet article nous calculons la trace de l'algèbre A_α (§ 5) et nous utilisons les identités de Barnes (i) et (iv) pour exhiber les homomorphismes d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$ indépendamment de la table des caractères (§ 6). La comparaison de leur somme avec la trace montre que la liste des homomorphismes est complète et sans répétitions.

§ 5. Calcul de la trace de l'algèbre A_α

On note T_α la trace de l'algèbre A_α, $\alpha \in X$ fixé. Soit B la base de A_α formée par l'unité et les $b(\gamma)$, avec $\gamma \in X$; pour $b \in B$ et $a \in A_\alpha$, on définit le coefficient $<b' \mid a>$ dans $\mathbf{C}$ par la condition suivante:

$$a = \sum_{b \in B} <b' \mid a> b\,;$$

on a, pour tout $a \in A_\alpha$,

$$T_\alpha(a) = \sum_{b \in B} <b' \mid ab>\,.$$

On obtient

$$T_\alpha(1) = \dim_{\mathbf{C}}(A_\alpha) = q$$

et

$$T_\alpha(b(\gamma_1)) = \sum_{\gamma_2} < b(\gamma_2)' \mid b(\gamma_1)\, b(\gamma_2) >$$

puisque $< 1' \mid b(\gamma) > \;=\; 0$, pour tout $\gamma \in X$. D'après (5), l'on calcule

$$\begin{aligned} < b(\gamma_2)' \mid b(\gamma_1)\, b(\gamma_2) > &= q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1)(-1)\, g(\alpha\gamma_1\gamma_2)\, g(\gamma_1\gamma_2^{-1})\, g(\gamma_2\gamma_2^{-1}) \\ &= -q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1)(-1)\, g(\alpha\gamma_1\gamma_2)\, g(\gamma_1\gamma_2^{-1}), \end{aligned}$$

pour $\gamma_1, \gamma_2 \in X$, d'où

$$T_\alpha(b(\gamma_1)) = -q^{-1}(q-1)^{-2}(a\gamma_1)(-1) \sum_{\gamma_2} g(\alpha\gamma_1\gamma_2)\, g(\gamma_1\gamma_2^{-1}),$$

ici l'on somme sur $\gamma_2 \in X$ et γ_1 est dans X. On a donc le théorème suivant:

Théorème 2. *La trace* T_α *de l'algèbre* A_α *prend les valeurs suivantes sur les générateurs:* $T_\alpha(1) = q$ *et*

(6) $$T_\alpha(b(\gamma)) = -q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma)(-1) \sum_{\beta_1\beta_2 = \alpha\gamma^2} g(\beta_1)\, g(\beta_2),$$

ici γ, β_1 *et* β_2 *désignent des éléments de* X.

Lemme 2. *Pour* $\beta \in X$, *on a*

(7) $$(q-1)^{-1} \sum_{\beta_1\beta_2 = \beta} g(\beta_1)\, g(\beta_2) = \sum_a e(2a)\, \beta(a),$$

avec $\beta_1, \beta_2 \in X$ *et* $a \in F^\times$.

C'est un cas particulier du lemme 5, (b) qu'on démontrera au § 5. Plus explicitement, on obtient

$$(q-1)^{-1} \sum_{\beta_1\beta_2 = \beta} g(\beta_1)\, g(\beta_2) = \begin{cases} (q-1)\, \delta(\beta), & \text{si } 2 = 0 \text{ dans } F, \\ \beta\left(\dfrac{1}{2}\right) g(\beta), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corollaire 1. *On a explicitement*

(8) $$T_\alpha(b(\gamma)) = \begin{cases} -q^{-1}\, \gamma(-1)\, \delta(\alpha\gamma^2), & \textit{si la caractéristique de } F \textit{ est } 2, \\ -q^{-1}\,(q-1)^{-1}(\alpha\gamma)(-1)\,(\alpha^{-1}\gamma^{-2})(2)\, g(\alpha\gamma^2), & \textit{sinon}. \end{cases}$$

§ 6. Homomorphismes d'algèbres de A dans $\mathbf{C}$

On pose $H_1 := F \times F$ et $H_2 := F_{q^2}$. On note $H_i^{\times}$ le groupe multiplicatif de l'algèbre H_i, pour $i = 1, 2$, et l'on pose $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = -1$, c'est-à-dire qu'on associe le signe ε_i à l'algèbre H_i. Pour $x \in H_1$, $x = (x_1, x_2)$ avec $x_1, x_2 \in F_q$, on pose $\bar{x} := (x_2, x_1)$; pour $x \in H_2$, on pose $\bar{x} := x^q$; on associe ainsi à chaque $x \in H_i$ le conjugé $\bar{x}$ de x, pour $i = 1, 2$. On définit la norme N (resp. la trace T) de H_i sur F_q par $\mathrm{N}x := x\bar{x}$ (resp. $Tx := x + \bar{x}$), pour $i = 1, 2$. Pour un caractère multiplicatif β de F, le composé de β avec la norme de H_i sur F définit un caractère β^* du groupe multiplicatif $H_i^{\times}$, pour $i = 1, 2$. On plonge F dans H_1 en appliquant $a \in F$ sur $(a, a) \in H_1$, on plonge F dans H_2 en tant que seul sous-corps à q éléments; pour un caractère ϕ de $H_i^{\times}$, on note ϕ_* la restriction de ϕ à $F_q^{\times}$, pour $i = 1, 2$. On définit la somme de Gauss d'un caractère ϕ du groupe multiplicatif $H_i^{\times}$ par

$$G(\phi) := \sum_x \psi(T(x))\,\phi(x) \qquad \text{avec} \qquad x \in H_i^{\times}, i = 1, 2\,.$$

Proposition 3. *Soient* $i = 1, 2$ *et* ϕ *un caractère de* $H_i^{\times}$ *tel que* $\phi_* = \alpha$. *Il existe alors un homomorphisme de* $\mathbf{C}$*-algèbres* $\hat{\phi}$ *de* A_α *dans* $\mathbf{C}$ *tel que*

$$\hat{\phi}(b(\gamma)) = \varepsilon_i\, q^{-1}(q-1)^{-1}(\alpha\gamma)(-1)\, G(\gamma^*\phi)\,, \tag{9}$$

pour tout $\gamma \in X$.

La preuve de l'existence d'un tel homomorphisme consiste en la vérification de la relation:

$$\hat{\phi}(b(\gamma_1))\,\hat{\phi}(b(\gamma_2)) = \hat{\phi}(b(\gamma_1)b(\gamma_2))\,,$$

pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in X$. D'après (5) ceci équivaut à l'identité suivante:

$$\begin{aligned} q^{-2}(q-1)^{-2}(\gamma_1\gamma_2)(-1)\, G(\gamma_1^*\phi)\, G(\gamma_2^*\phi) &= q^{-1}(q-1)^{-1}\,\delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\ + \varepsilon_i\, q^{-2}(q-1)^{-3}(\gamma_1\gamma_2)(-1)\, g(\alpha\gamma_1\gamma_2) &\sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\, g(\gamma_2\gamma^{-1})\, G(\gamma^*\phi)\,, \end{aligned}$$

pour $\gamma_1, \gamma_2 \in X$;
cette identité est équivalente à

$$\begin{aligned} &\frac{G(\gamma_1^*\phi)\, G(\gamma_2^*\phi)}{g(\alpha\gamma_1\gamma_2)} + q(q-1)\,\delta(\alpha\gamma_1\gamma_2)\,\alpha(-1) \\ &= \varepsilon_i(q-1)^{-1}\sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\, g(\gamma_2\gamma^{-1})\, G(\gamma^*\phi), \qquad \text{pour} \quad \gamma_1, \gamma_2 \in X\,; \end{aligned}$$

l'on somme sur $\gamma \in X$.

Cette dernière est un cas particulier du théorème 1 de [5], le cas de $H_1 = F \times F$ correspond à l'identité (i) et le cas de $H_2 = F_{q^2}$ correspond à l'identité (iv) du théorème 2 de [5]. Une démonstration détaillée est indiquée en [4].

La démonstration de la proposition (3) est ainsi achevée.

Nous nous proposons maintenant de démontrer que tout homomorphisme d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$ est de la forme $\hat{\phi}$ avec un caractère multiplicatif ϕ de H_i, $i = 1$ ou 2.

LEMME 3. *Soient* $m \geqslant 0$ *un entier et* R *la* $\mathbf{C}$*-algèbre* $\mathbf{C}^m$. *Pour* $1 \leqslant i \leqslant m$, *soit* p_i *la projection de* R *sur* $\mathbf{C}$ *donnée par* $p_i(x) := x_i$, *pour* $x \in R$, $x = (x_1, ..., x_m)$. *On a les propriétés suivantes:*

(a) *Chaque* p_i *est un homomorphisme de* $\mathbf{C}$*-algèbres, pour* $1 \leqslant i \leqslant m$.

(b) *Tout homomorphisme de* $\mathbf{C}$*-algèbres de* R *dans* $\mathbf{C}$ *est un des* p_i *avec* $1 \leqslant i \leqslant m$.

(c) *La somme des* p_i *est égale à la trace* Tr *de* R *sur* $\mathbf{C}$, *c'est-à-dire que* $p_1 + ... + p_m = \mathrm{Tr}$.

(d) *Si* $H = (h_j)_{j \in J}$ *est une famille d'homomorphismes de* $\mathbf{C}$*-algèbres* $h_j : R \to \mathbf{C}$ *telle que* $\sum_{j \in J} h_j = n \, \mathrm{Tr}$, *alors* H *contient tout homomorphisme d'algèbres de* R *dans* $\mathbf{C}$ *exactement* n *fois, pour* $n > 0$ *entier.*

Seul le point (d) nécessite une vérification. D'après (b), on sait que chaque $h_j (j \in J)$ est un des projecteurs $p_i (1 \leqslant i \leqslant m)$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, soit n_i le nombre de fois où la projection p_i intervient dans la famille H et soit e_i l'élément de R tel que $p_i(e_i) = 1$ et $p_k(e_i) = 0$ pour tout $k \neq i$ avec $1 \leqslant k \leqslant m$. On trouve

$$n_i = \sum_{k=1}^{m} n_k \, p_k(e_i) = \sum_{j \in J} h_j(e_i) = n \, \mathrm{Tr}\,(e_i) = n\,,$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$. La famille H contient donc tout homomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres de R dans C exactement n fois. C.Q.F.D.

LEMME 4 (Poisson). *Soit* H *un groupe abélien fini et soit* H' *un sous-groupe de* H. *Etant donné un caractère* χ *de* H', *on note* $C(\chi)$ *l'ensemble des caractères* ψ *de* H *tels que la restriction de* ψ *à* H' *soit égale à* χ. *On a alors, pour tout* $x \in H$,

$$(\operatorname{card} C(\chi))^{-1} \sum_{\psi \in C(\chi)} \psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \notin H', \\ \chi(x), & \text{si} \quad x \in H'. \end{cases}$$

La preuve du lemme de Poisson est classique; nous l'appliquons maintenant au groupe multiplicatif $H_i^\times$ de l'algèbre H_i pour $i = 1, 2$. Soit toujours α un caractère fixé de $F^\times$; notons $C_i(\alpha)$ l'ensemble des caractères ϕ de $H_i^\times$ tels que la restriction ϕ_* de ϕ à $F_q^\times$ soit égale à α. On obtient:

Lemme 5. *On a, pour* $i = 1, 2$,

(a) $\operatorname{card} C_i(\alpha) = q - \varepsilon_i$,

(b) $(\operatorname{card} C_i(\alpha))^{-1} \sum_{\phi \in C_i(\alpha)} G(\phi) = \sum_a e(2a)\,\alpha(a), \quad a \in F_q^\times$.

En effet, on a $\operatorname{card} C_i(\alpha) = (\operatorname{card} F^\times)^{-1} \operatorname{card} H_i^\times$ et donc $\operatorname{card} C_1(\alpha) = q - 1$ et $\operatorname{card} C_2(\alpha) = q + 1$, d'où l'assertion (a).

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(\operatorname{card} C_i(\alpha))^{-1} \sum_{\phi \in C_i(\alpha)} G(\phi) &= (\operatorname{card} C_i(\alpha))^{-1} \sum_{x \in H_i^\times} \psi(Tx) \sum_{\phi \in C_i(\alpha)} \phi(x) \\ &= \sum_a \psi(2a)\,\alpha(a), \quad a \in F_q^\times,\end{aligned}$$

d'après le lemme 4, d'où (b).

Proposition 4. *La somme des homomorphismes* $\hat{\phi} : A_\alpha \to \mathbf{C}$ *avec* $\phi \in C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)$ *est égale à* $2\,T_\alpha$ *(deux fois la trace de* A_α*).*

En effet, on remarque tout d'abord qu'on a bien

$$\sum_{\phi \in C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)} \hat{\phi}(1) = \operatorname{card} C_1(\alpha) + \operatorname{card} C_2(\alpha) = 2q = 2\,T_\alpha(1).$$

Soit maintenant $\gamma \in X$; on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{\phi \in C_i(\alpha)} \hat{\phi}(b(\gamma)) &= \varepsilon_i\, q^{-1}(q-1)^{-1}(\alpha\gamma)(-1) \sum_{\phi \in C_i(\alpha)} G(\gamma^*\phi) \\ &= \varepsilon_i\, q^{-1}(q-1)^{-1}(\alpha\gamma)(-1) \sum_{\psi \in C_i(\alpha\gamma^2)} G(\psi) \\ &= \varepsilon_i\, q^{-1}(q-1)^{-1}(q-\varepsilon_i)\,(\alpha\gamma)(-1) \sum_a e(2a)\,(\alpha\gamma^2)(a), \quad a \in F_q^\times;\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{\phi \in C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)} \hat{\phi}(b(\gamma)) = -2q^{-1}(q-1)^{-1}(\alpha\gamma)(-1) \sum_a e(2a)(\alpha\gamma^2)(a), \quad a \in F_q^\times,$$
$$= 2\, T_\alpha(b(\gamma)),$$

d'après (6) et (7) (théorème 2 et lemme 2). C.Q.F.D.

Pour tout caractère ϕ de $H_i^\times$, on définit le caractère conjugué $\bar{\phi}$ de H_i par $\bar{\phi}(x) := \phi(\bar{x})$, pour tout $x \in H_i^\times$, $i = 1, 2$.

Soit ϕ un caractère multiplicatif de H_i, $i = 1, 2$: on remarque que $\phi = \bar{\phi}$ si et seulement s'il existe $\beta \in X$, tel que $\beta^* = \phi$.

Pour tout $\phi \in C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)$, on a $\hat{\phi} = \hat{\bar{\phi}}$, puisque $G(\gamma^*\phi) = G(\gamma^*\bar{\phi})$, pour tout $\gamma \in X$.

D'autre part, soit $\beta \in X$ et soit ϕ_i le composé de β avec la norme de $H_i^\times$ sur $F^\times$, pour $i = 1, 2$. On a alors $\phi_i \in C_i(\beta^2)$ et

$$\varepsilon_1\, G(\gamma^*\phi_1) = \varepsilon_2\, G(\gamma^*\phi_2),$$

pour tout $\gamma \in X$; ici l'on applique le théorème de Hasse et Davenport, c.f. [3], qui dit, dans ce cas:

$$G(\gamma^*\phi_2) = -g(\gamma\beta)^2.$$

Il s'ensuit que les homomorphismes $\hat{\phi}_1$ et $\hat{\phi}_2$ sont égaux.

Vu le lemme 3, (d) et la proposition 4, il s'ensuit maintenant le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Tout homomorphisme de* $\mathbf{C}$*-algèbres de* A_α *dans* $\mathbf{C}$ *est de la forme* $\hat{\phi}$ *avec* ϕ *dans* $C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)$. *Pour* $i = 1, 2$ *et* $\phi, \psi \in C_i(\alpha)$, *on a* $\hat{\phi} = \hat{\psi}$ *si et seulement si* $\phi = \psi$ *ou* $\phi = \bar{\psi}$. *Pour* $\phi_1 \in C_1(\alpha)$ *et* $\phi_2 \in C_2(\alpha)$, *on a* $\hat{\phi}_1 = \hat{\phi}_2$ *si et seulement s'il existe un caractère* β *de* $F^\times$ *tel que* ϕ_1 *(resp.* ϕ_2*) soit le composé de* β *avec la norme de* $F \times F$ *(resp.* F_{q^2}*) sur* F.

RÉFÉRENCES

[1] CHANG, B. Decomposition of Gelfand-Graev characters of $GL_3(q)$. *Commun. Algebra 4* (1976), 375-401.

[2] CURTIS, C. W. and T. V. FOSSUM. On Centralizer Rings and Characters of Representations of Finite Groups. *Math. Zeitschr. 107* (1968), 402-406.

[3] DAVENPORT, H. und H. HASSE. Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktion in gewissen zyklischen Fällen. *J. Reine u. Angew. Math. 172* (1935), 151-182.

[4] HELVERSEN-PASOTTO, A. L'identité de Barnes pour les corps finis. *Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU (théorie des nombres)*, 19ᵉ année, 1977/1978, N° 22, 12 p.
[5] —— L'identité de Barnes pour les corps finis. *C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286* (1978), Série A, 297-300.
[6] —— Darstellungen von $GL(3, \mathbf{F}_q)$ und Gaussche Summen. *Math. Ann. 260* (1982), 1-21.
[7] LI, W. and J. SOTO ANDRADE. Barnes Identities and Representations of $GL(2)$, Part. I: Finite Field Case. *J. reine angew. Math. 344* (1983), 171-179.
[8] LI, W. Barnes Identities and Representations of $GL(2)$, Part II: Nonarchimedian Local Field Case. *J. reine angew. Math. 345* (1983), 69-92.
[9] STEINBERG, R. *Lectures on Chevalley Groups*. Yale Lecture Notes (1967).
[10] —— The Representations of $GL(3, q)$, $GL(4, q)$, $PGL(3, q)$ and $PGL(4, q)$. *Canadian Journal of Mathematics 3* (1951), 225-235.
[11] YOKONUMA, T. Complément au mémoire « Sur le commutant d'une représentation d'un groupe de Chevalley fini ». *Journ. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sec. I, Vol. XVI, Part 1* (1969), 147-148.

(Reçu le 7 décembre 1984)

Anna Helversen-Pasotto

Département de Mathématiques
Parc Valrose
06034 Nice Cedex (France)

vide-leer-empty