

# Appendice

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## APPENDICE

Le but de cet appendice est de montrer comment le lemme utilisé dans la démonstration précédente découle du théorème de Hodge :

LEMME. Soit  $S$  une surface de Riemann close,  $x_1, \dots, x_n \in S$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ . Supposons  $\sum_i \alpha_i = 0$ . Alors il existe une fonction harmonique  $h: S \rightarrow \mathbf{R}$  avec singularités logarithmiques de poids  $\alpha_i$  en  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ .

Si  $h$  et  $h'$  sont deux telles fonctions, elles diffèrent par une constante.

Avant de prouver ce lemme, quelques rappels sur la théorie de Hodge seront nécessaires :

Si  $S$  est une surface de Riemann, alors  $S$  est munie d'une structure presque complexe, c'est-à-dire d'un morphisme (linéaire) de fibré  $J: TS \rightarrow TS$  tel que  $J^2 = -I$  (identité).  $J$  peut être défini à l'aide d'une métrique conforme en posant  $Y = JX$  si et seulement si  $\{X; Y\}$  est une base ortho-normée d'orientation positive, pour tout vecteur unité  $X$ .

Si  $\omega$  est une 1-forme sur  $S$ , on définit  $*\omega$  par :

$$*\omega(X) = -\omega(JX);$$

$*$  est également un morphisme de fibré  $*: T^*S \rightarrow T^*S$  tel que  $*^2 = -1$ .

Si  $z = x + iy$  est une coordonnée sur  $S$ , alors

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = i\frac{\partial}{\partial z}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

$$*dx = dy, \quad *dy = -dx, \quad *dz = -idz, \quad *d\bar{z} = id\bar{z}.$$

Si  $f$  est une fonction, on a

$$d*df = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy = 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} idz \wedge d\bar{z}.$$

On dit qu'une 1-forme est *harmonique* si  $d\omega = d*\omega = 0$ , donc  $\omega$  est harmonique si et seulement si c'est localement la différentielle d'une fonction harmonique.

THÉORÈME DE HODGE. Si  $\omega$  est une 1-forme différentielle sur  $S$ , alors il existe  $u, v \in C^\infty(S)$  et  $\omega_0$  une 1-forme harmonique tels que

$$\omega = \omega_0 + du + *dv.$$

Nous ne prouvons pas ce théorème ici (cf. [6] ou [8]).

*Preuve du lemme.*

*Unicité.* Soient  $h$  et  $h'$  deux fonctions harmoniques avec les mêmes singularités logarithmiques, alors  $h - h'$  est une fonction harmonique sans singularités, donc constante puisque  $S$  est compacte.

*Existence.* Par linéarité, il suffit de montrer que si  $p, q \in S$  alors il existe  $h: S \rightarrow \mathbb{R}$ , harmoniques avec singularités logarithmiques de poids  $-1$  en  $p$  et  $+1$  en  $q$  (la fonction voulue s'obtient ensuite comme combinaison linéaire de telles fonctions). On peut, pour la même raison, supposer que  $p$  et  $q$  appartiennent à un même domaine  $U$  d'une coordonnée  $z$ . Soit  $D$  un sous-domaine contenant  $p$  et  $q$  et tel que  $\bar{D} \subset U$ . Donnons-nous ensuite une fonction lisse  $\chi: S \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\chi|_D = 1 \quad \text{et} \quad \chi|_{S-U} = 0.$$

On définit  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  par  $f(z) = \chi(z) \log((z-q)/(z-p))$  et l'on étend à  $f$  à  $S$  tout entier en posant  $f|_{S-U} = 0$ . Considérons la 1-forme

$$\zeta = df - i*df = 2 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Remarquons que  $\zeta = 0$  sur  $D \cup (S-U)$ .

Le théorème de Hodge permet d'écrire

$$\zeta = \omega_0 + du + *dv$$

avec  $\omega_0$  harmonique. Posons ensuite

$$\omega = df - du = \omega_0 + i*df + *dv;$$

alors  $\omega$  est fermée car  $d\omega = d(df - du) = 0$ ,  $\omega$  est cofermée car

$$** = -1 \quad \text{donc} \quad d*\omega = d*\omega_0 - id^2f - d^2v = 0.$$

Donc  $\omega$  est harmonique.

Posons

$$h = \operatorname{Re}(f - u) = \frac{1}{2}((f - u) + (\bar{f} - \bar{u}));$$

alors  $h$  est harmonique puisque

$$d*dh = \frac{1}{2} d*(d(f-u) + d(\bar{f} - \bar{\omega})) = \frac{1}{2} d*(\omega + \bar{\omega}) = 0.$$

$h$  a clairement les singularités voulues. □

### RÉFÉRENCES

- [1] BERS, L. Quasi-Conformal Mapping and Teichmüller's theorems. In *Analytic function*, Princeton University Press, Princeton mathematical serie, No. 24.
- [2] ——— *Riemann surfaces*. Mimeographed Notes, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences (1958).
- [3] CHERN, S. S. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. Amer. Math. Soc.* 6 (1955), 771-782.
- [4] GROMOV, M. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*. Textes mathématiques 1, CEDIC/Fernand-Nathan, 1981.
- [5] HUBBARD, J. and H. MASUR. Quadratic differentials and foliations. *Acta. Math.* 142, 3-4 (1979), 221-274.
- [6] SPRINGER, G. *Introduction to Riemann Surfaces*. Addison Wesley, 1957.
- [7] STREBEL, K. *Quadratic differentials*. Springer Verlag, 1984.
- [8] WARNER, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Graduate text in Mathematics 94, Springer Verlag.

(Reçu le 12 décembre 1984)

Marc Troyanov

Section de Mathématiques  
 Université de Genève  
 C.P. 240  
 CH - 1211 Genève 24