1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Plutôt que de nous restreindre d'entrée aux moyennes définies sur $\mathfrak{P}(X)$, nous préférons considérer d'abord X comme fourni avec une *algèbre* $\mathfrak{B}$ de parties de X (une algèbre est stable par réunions finies et par passage au complémentaire, et contient X). De plus, il est avantageux de considérer à priori un *pseudogroupe* $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$, comme défini dans la section 1. Le formalisme des pseudogroupes permet d'importantes simplifications d'écriture. Son avantage se voit aussi dans l'étude des sous-espaces (section 5): un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$ définit en effet canoniquement un pseudogroupe $\mathfrak{G}_U$ de transformations de $(U, \mathfrak{B}_U)$ avec

$$\mathfrak{G}_U = \{\gamma \in \mathfrak{G} \mid \gamma : S \to T \text{ avec } S \subset U \text{ et } T \subset U\}$$

et

$$\mathfrak{B}_U = \{S \in \mathfrak{B} \mid S \subset U\}.$$

Après une section consacrée aux définitions et aux notations, les trois sections suivantes étudient successivement les cas où

2) $\mathfrak{B}$ est une algèbre,

3) $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre,

4) $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}(X)$.

Pour le dernier cas, le théorème 11 résume une partie des résultats obtenus. La section 5 décrit quelques exemples classiques.

Nous remercions E. Bédos qui nous a signalé le livre de Tarski, P. L. Aubert la thèse de Sherman sur la moyennabilité des groupes [Sh] et J. Berney d'autres précisions bibliographiques. Nous renvoyons à [BH] pour l'intérêt du théorème I relativement à la notion de *moyennabilité intérieure* pour un groupe discret.

1. Définitions et notations

On se donne un ensemble non vide X et une algèbre $\mathfrak{B}$ de parties de X.

Un *pseudogroupe* $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$ est un ensemble de bijections $\gamma : S \to T$, où $S, T \in \mathfrak{B}$, qui satisfait

i) l'identité $X \to X$ est dans $\mathfrak{G}$;

ii) si $\gamma : S \to T$ est dans $\mathfrak{G}$, l'inverse $\gamma^{-1} : T \to S$ l'est aussi;

iii) si $\gamma : S \to T$ et $\delta : T \to U$ sont dans $\mathfrak{G}$, le composé $\delta\gamma : S \to U$ est dans $\mathfrak{G}$;

iv) si $\gamma : S \to T$ est dans $\mathfrak{G}$ et si $S' \in \mathfrak{B}$ est contenu dans S, la restriction de γ à S' est dans $\mathfrak{G}$;

v) soient $S, T \in \mathfrak{B}$ et $\varphi : S \to T$ une bijection; s'il existe une partition *finie* $S = \coprod S_j$ avec $S_j \in \mathfrak{B}$, telle que chaque restriction $\varphi \mid S_j$ soit dans $\mathfrak{G}$, alors $\varphi \in \mathfrak{G}$.

La condition iv) exprime que $\mathfrak{G}$ est stable par *localisation* et v) par *recollement fini*. La donnée de $\mathfrak{G}$ contient celle de $\mathfrak{B}$ vu les conditions i) et iv).

Deux parties $S, T \in \mathfrak{B}$ sont *équivalentes* modulo $\mathfrak{G}$, ce qu'on note $S \equiv T \pmod{\mathfrak{G}}$, s'il existe dans $\mathfrak{G}$ une bijection de source S et de but T. Une partie $S \in \mathfrak{B}$ est *grande* s'il existe $T_1, ..., T_N \in \mathfrak{B}$, chaque T_j étant équivalent à une partie de S, avec $X = \cup T_j$; on obtiendrait la même définition (vu la propriété iv)) en exigeant de plus que les T_j soient disjoints deux à deux. (La partie S est grande si et seulement si X est S-borné au sens de [R1], [R2].) Nous disons que le pseudogroupe $\mathfrak{G}$ est *faiblement paradoxal* s'il existe dans $\mathfrak{G}$ deux bijections ayant X pour source qui sont de buts disjoints, ce que nous abrégeons par

$$2X \leqslant X \pmod{\mathfrak{G}}.$$

Nous disons aussi, parfois et abusivement, que l'espace $(X, \mathfrak{B})$ est faiblement paradoxal.

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on note I_p l'ensemble $\{1, ..., p\}$ et $\mathfrak{C}_p$ le pseudogroupe de toutes les bijections entre sous-ensembles de I_p. On note X_p le produit direct $X \times I_p$, qu'on munit de l'algèbre produit $\mathfrak{B}_p = \mathfrak{B} \times \mathfrak{P}(I_p)$. Si $\mathfrak{G}$ est comme ci-dessus, le produit direct $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G} \times \mathfrak{C}_p$ est le pseudogroupe de transformations de $(X_p, \mathfrak{B}_p)$ engendré par les bijections

$$\left\{ \begin{array}{l} S \times \{q\} \to T \times \{r\} \\ (x, q) \mapsto (\gamma x, r) \end{array} \right. .$$

où $\gamma : S \to T$ est dans $\mathfrak{G}$ et où q, r sont dans I_p. Nous disons que $\mathfrak{G}$ est *virtuellement paradoxal* s'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $\mathfrak{G}_p$ soit faiblement paradoxal. Notons ceci: lorsque $r \geqslant p$, on a $I_r \supset I_p$, et $(X_p, \mathfrak{B}_p)$ est un sous-espace de $(X_r, \mathfrak{B}_r)$ sur lequel $\mathfrak{G}_r$ induit précisément $\mathfrak{G}_p$. On vérifie plus bas que, si $\mathfrak{G}_p$ est faiblement paradoxal, alors il en est de même de $\mathfrak{G}_r$ pour tout $r \geqslant p$ (voir la remarque qui suit la proposition 3).

Le pseudogroupe $\mathfrak{G}$ est *moyennable* s'il existe une *moyenne $\mathfrak{G}$-invariante* sur $(X, \mathfrak{B})$, c'est-à-dire une application $\mu : \mathfrak{B} \to [0, 1]$ telle que

$$\mu(X) = 1\,,$$
$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \qquad \text{pour} \qquad S, T \in \mathfrak{B} \text{ avec } S \cap T = \emptyset\,,$$
$$\mu(T) = \mu(S) \qquad \text{s'il existe } \gamma : S \to T \text{ dans } \mathfrak{G}\,.$$

Nous désignons par $l^\infty(X)$ l'espace de Banach des fonctions bornées à valeurs réelles sur X avec la norme de la convergence uniforme, et par $l^\infty(X, \mathfrak{B})$ l'adhérence dans $l^\infty(X)$ du sous-espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques des éléments de $\mathfrak{B}$. Alors $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement s'il existe une forme linéaire positive normalisée $\mathfrak{G}$-invariante sur $l^\infty(X, \mathfrak{B})$, forme que nous notons aussi μ. (Rappel de vocabulaire: μ est positive si $\mu(f) \geqslant 0$ pour tout $f \in l^\infty(X, \mathfrak{B})$ à valeurs positives ou nulles, μ est normalisée si μ prend la valeur 1 sur la fonction constante de valeur 1, et μ est $\mathfrak{G}$-invariante si $\mu(f\gamma) = \mu(f)$ pour tout $\gamma : S \to T$ dans $\mathfrak{G}$ et pour tout $f \in l^\infty(X, \mathfrak{B})$ à support dans T.) Pour l'équivalence entre les deux définitions de moyennabilité, voir le théorème 20.30 de [HS].

Etant donné un entier $p \geqslant 1$, on laisse au lecteur le soin de vérifier que $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement si $\mathfrak{G}_p$ l'est. Plus généralement, si $\mathfrak{G}$ agit sur $(X, \mathfrak{B})$ et si $U \in \mathfrak{B}$ est une grande partie de X, alors $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement si $\mathfrak{G}_U$ est moyennable. (Voir aussi la proposition 12.)

2. Paradoxes relatifs à une algèbre

On considère à nouveau un ensemble non vide X, une algèbre $\mathfrak{B}$ de parties de X, et un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$.

Théorème 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *n'est pas moyennable;*

ii) $\mathfrak{G}$ *est virtuellement paradoxal.*

Preuve. S'il existe un entier $p \geqslant 1$ avec $\mathfrak{G}_p$ faiblement paradoxal, il est évident que $\mathfrak{G}_p$ n'est pas moyennable, et par suite $\mathfrak{G}$ n'est pas moyennable; donc ii) implique i).

Notons $d^\infty(X, \mathfrak{B})$ le sous-espace vectoriel de $l^\infty(X, \mathfrak{B})$ engendré par les différences $\chi - \chi\gamma$, avec $\gamma : S \to T$ dans $\mathfrak{G}$ et χ la fonction caractéristique de T. Notons C le cône convexe ouvert de $l^\infty(X, \mathfrak{B})$ formé des fonctions f