2. Paradoxes relatifs à une algèbre

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

$$\mu(X) = 1\,,$$
$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \quad \text{pour} \quad S, T \in \mathfrak{B} \text{ avec } S \cap T = \emptyset\,,$$
$$\mu(T) = \mu(S) \quad \text{s'il existe } \gamma : S \to T \text{ dans } \mathfrak{G}\,.$$

Nous désignons par $l^{\infty}(X)$ l'espace de Banach des fonctions bornées à valeurs réelles sur X avec la norme de la convergence uniforme, et par $l^{\infty}(X, \mathfrak{B})$ l'adhérence dans $l^{\infty}(X)$ du sous-espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques des éléments de $\mathfrak{B}$. Alors $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement s'il existe une forme linéaire positive normalisée $\mathfrak{G}$-invariante sur $l^{\infty}(X, \mathfrak{B})$, forme que nous notons aussi μ. (Rappel de vocabulaire: μ est positive si $\mu(f) \geqslant 0$ pour tout $f \in l^{\infty}(X, \mathfrak{B})$ à valeurs positives ou nulles, μ est normalisée si μ prend la valeur 1 sur la fonction constante de valeur 1, et μ est $\mathfrak{G}$-invariante si $\mu(f\gamma) = \mu(f)$ pour tout $\gamma : S \to T$ dans $\mathfrak{G}$ et pour tout $f \in l^{\infty}(X, \mathfrak{B})$ à support dans T.) Pour l'équivalence entre les deux définitions de moyennabilité, voir le théorème 20.30 de [HS].

Etant donné un entier $p \geqslant 1$, on laisse au lecteur le soin de vérifier que $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement si $\mathfrak{G}_p$ l'est. Plus généralement, si $\mathfrak{G}$ agit sur $(X, \mathfrak{B})$ et si $U \in \mathfrak{B}$ est une grande partie de X, alors $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement si $\mathfrak{G}_U$ est moyennable. (Voir aussi la proposition 12.)

2. Paradoxes relatifs à une algèbre

On considère à nouveau un ensemble non vide X, une algèbre $\mathfrak{B}$ de parties de X, et un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$.

Théorème 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *n'est pas moyennable;*

ii) $\mathfrak{G}$ *est virtuellement paradoxal.*

Preuve. S'il existe un entier $p \geqslant 1$ avec $\mathfrak{G}_p$ faiblement paradoxal, il est évident que $\mathfrak{G}_p$ n'est pas moyennable, et par suite $\mathfrak{G}$ n'est pas moyennable; donc ii) implique i).

Notons $d^{\infty}(X, \mathfrak{B})$ le sous-espace vectoriel de $l^{\infty}(X, \mathfrak{B})$ engendré par les différences $\chi - \chi\gamma$, avec $\gamma : S \to T$ dans $\mathfrak{G}$ et χ la fonction caractéristique de T. Notons C le cône convexe ouvert de $l^{\infty}(X, \mathfrak{B})$ formé des fonctions f

pour lesquelles $\inf_{x \in X} f(x) > 0$. Une moyenne $\mathfrak{G}$-invariante sur $(X, \mathfrak{B})$ est une forme linéaire continue μ sur $l^\infty(X, \mathfrak{B})$, telle que la restriction $\mu \mid d^\infty(X, \mathfrak{B})$ soit nulle et telle que la restriction $\mu \mid C$ soit à valeurs strictement positives. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on en déduit que la condition i) est équivalente à $d^\infty(X, \mathfrak{B}) \cap C \neq \emptyset$. On suppose donc que $d^\infty(X, \mathfrak{B})$ rencontre C, et il s'agit de montrer que $\mathfrak{G}_p$ est faiblement paradoxal pour p assez grand.

Comme C est ouvert, il existe des éléments $\gamma_j \colon S_j \to T_j$ dans $\mathfrak{G}$ et des nombres rationnels n_j tels que la fonction

$$\sum_{j=1}^{m-1} n_j(\chi_j - \chi_j \gamma_j)$$

soit dans C, où χ_j désigne la fonction caractéristique de T_j. En remplaçant quand il le faut γ_j par γ_j^{-1}, on peut rendre chaque n_j positif. Quitte à multiplier la fonction par un entier convenable, on peut aussi supposer les n_j entiers et la fonction minorée par la constante 1. En répétant les γ_j, on peut enfin supposer tous les n_j égaux à 1. On a donc

$$1 + \sum_{j=1}^{n-1} \chi_j \gamma_j \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \chi_j$$

pour un entier n convenable. Notons $\chi'_j = 1 - \chi_j \gamma_j$ la fonction caractéristique de $X - S_j$ et ajoutons les χ'_j à l'inégalité précédente; comme $\chi_j \leqslant 1$ et $\chi'_j \leqslant 1$ on obtient

$$n \leqslant f = \sum_{j=1}^{n-1} (\chi_j + \chi'_j) \leqslant 2n - 2 .$$

On définit encore

$$R_f = \{(x, q) \in X_{2n-2} \mid q \leqslant f(x)\}$$

qui est dans $\mathfrak{B}_{2n-2}$ car c'est le sous-graphe de la fonction $\mathfrak{B}$-mesurable f, et on note $\pi_2 \colon R_f \to X$ la projection canonique. L'inégalité $n \leqslant f$ implique $X_n \subset R_f$.

Soit $\Phi \colon X_{n-1} \to X_{2n-2}$ l'application injective définie par

$$\Phi(x, j) = (\gamma_j x, 2j-1) \quad \text{si} \quad x \in S_j \quad \text{et} \quad \Phi(x, j) = (x, 2j) \quad \text{si} \quad x \notin S_j .$$

Notons U l'image de Φ et $\pi_1 \colon U \to X$ la projection canonique. Pour tout $y \in X$, le cardinal de $\pi_1^{-1}(y)$ est précisément $f(y)$. Vu le lemme qui suit, il existe $\Psi \in \mathfrak{G}_{2n-2}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & & & X_n \arrow[d, phantom, "\cap" description] & \\ X_{2n-2} \arrow[r, phantom, "\supset"] & X_{n-1} \arrow[r, "\Phi"] & U \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & R_f \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dl, "\pi_2"] & X_{2n-2} \\ & & X & & \end{tikzcd}$$

commute.

Soit γ la restriction à X_n de $\Phi^{-1}\Psi^{-1}$, qui est dans $\mathfrak{G}_n$. Soit $\gamma_1 \in \mathfrak{G}_n$ l'itéré γ^n de γ; on a $\gamma(X_n) \subset X_{n-1}$, de sorte que les ensembles $X_n - X_{n-1}$, $\gamma(X_n - X_{n-1})$, ..., $\gamma^{n-1}(X_n - X_{n-1})$, $\gamma^n(X_n)$, sont disjoints. Définissons $\gamma_2 \in \mathfrak{G}_n$ par $\gamma_2(x, q) = \gamma^{q-1}(x, n)$. Alors γ_1 et γ_2 ont des buts disjoints, et $\mathfrak{G}_n$ est bien faiblement paradoxal. □

L'existence de $\Psi \in \mathfrak{G}_{2n-2}$ invoquée dans la preuve se justifie comme suit:

Lemme 2. *On considère un entier $p \geqslant 1$ et deux parties U_1, U_2 de X_p, dans $\mathfrak{B}_p$. On note $\pi_j \colon U_j \to X$ la restriction à U_j de la projection canonique $X_p = X \times I_p \to X (j = 1, 2)$, et on note $\mathfrak{C}_p$ le pseudogroupe de transformations de $(X_p, \mathfrak{B}_p)$ engendré par les applications $\mathrm{id}_X \times \sigma$ où σ est une bijection de I_p.*

Si les cardinaux de $\pi_1^{-1}(x)$ et $\pi_2^{-1}(x)$ sont égaux pour tout $x \in X$, alors il existe $\Psi \in \mathfrak{C}_p$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & U_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ & X \end{tikzcd}$$

commute.

Preuve. Il suffit de montrer le lemme lorsque U_2 est tel que $(x, q) \in U_2$ implique $(x, t) \in U_2$ pour $t = 1, 2, ..., q$ (cas d'un sous-graphe). Toute bijection $U_1 \to U_2$ faisant commuter le diagramme peut s'écrire $(x, q) \mapsto (x, r(x, q))$. Il en existe une, unique, pour laquelle toutes les fonctions $q \mapsto r(x, q)$ sont croissantes, x étant dans l'image de π_1; on la note Ψ.

Pour tout $t \in \{1, ..., p\}$, l'ensemble $S_t = \{x \in X \mid (x, t) \in U_1\}$ est dans $\mathfrak{B}$, donc sa fonction caractéristique χ_t est $\mathfrak{B}$-mesurable. Comme $r(x, q) = \sum_{1 \leqslant t \leqslant q} \chi_t(x)$, la fonction r est $\mathfrak{B}_p$-mesurable. Par suite l'application Ψ est $\mathfrak{B}_p$-mesurable.

Etant donnés $q, s \in I_p$, l'ensemble

$$A_{q,s} = \{x \in X \mid (x, q) \in U_1 \text{ et } \Psi(x, q) = (x, s)\}$$

est donc dans $\mathfrak{B}$. Si $x \in A_{q,s}$, alors $\Psi(x, q) = (x, s)$. Ceci étant vrai pour toute paire (q, s), il en résulte que $\Psi \in \mathfrak{C}_p$. □

Le critère suivant peut faciliter la vérification qu'un pseudogroupe donné est faiblement (ou virtuellement) paradoxal. Il est du même type que, par exemple, le théorème 2.7 de [Sh].

PROPOSITION 3. *Si* $\mathfrak{G}$ *est un pseudogroupe de transformations d'un espace* $(X, \mathfrak{B})$, *les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *est faiblement paradoxal.*

ii) *Il existe un entier* $n \geqslant 2$ *et des parties* $S_1, \ldots, S_{n-1}, S_n, T_1, \ldots, T_{n-1}$ *dans* $\mathfrak{B}$ *avec*
— *les* S_j *sont disjoints deux à deux*
— S_n *est grand*
— T_k *est équivalent à une partie de* $S_k (k=1, \ldots, n-1)$
— $\left(\coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} S_j\right) \subset \left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} T_k\right)$.

iii) *Il existe* $\gamma : X \to R$ *dans* $\mathfrak{G}$ *tel que* $X - R$ *soit grand.*

Preuve. L'implication i) $\Rightarrow$ ii) est banale (avec $n=2$, $T=X$ et S_1, S_2 les buts des bijections de la définition).

Si ii) est vrai, on peut supposer de plus les T_k disjoints deux à deux: sinon, on considère

$$T'_1 = T_1, T'_2 = T_2 - T_1, \ldots, T'_{n-1} = T_{n-1} - (T_1 \cup \ldots \cup T_{n-2}).$$

Supposons la condition ii) vérifiée, avec les T_k disjoints deux à deux. Posons $T = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} T_k$, et choisissons dans $\mathfrak{G}$ une bijection α de source T et de but $S' \subset \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n-1} S_j$, obtenue en recollant des éléments $T_j \to S'_j \subset S_j$. Posons $R = S' \cup (X - T)$, et notons $\gamma : X \to R$ la bijection qui coïncide avec α sur T et avec l'identité sur $X - T$. La condition iii) est vérifiée, car $X - R$ contient la grande partie S_n.

Supposons enfin la condition iii) vérifiée. Comme $X - R$ est grand, il existe dans $\mathfrak{G}$ des éléments $\delta_j : S_j \to T_j$ avec $S_j \subset X - R$ et les T_j disjoints deux à deux $(j=1, \ldots, N)$, tels que $X = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant N} T_j$. Les ensembles

$X - R, \gamma(X-R), \ldots, \gamma^{N-1}(X-R), \gamma^N(X)$ sont disjoints deux à deux. Posons $\gamma' = \gamma^N$, et soit γ'' la bijection de source X qui coïncide avec $\gamma^{j-1}(\delta_j)^{-1}$ sur T_j pour $j = 1, \ldots, N$. Comme les buts de γ' et γ'' sont disjoints, $\mathfrak{G}$ est faiblement paradoxal. $\square$

Soient r et p des entiers avec $r \geqslant p \geqslant 1$. Comme nous l'avons déjà affirmé, il résulte de la proposition 3 que, si $\mathfrak{G}_p$ est faiblement paradoxal, alors $\mathfrak{G}_r$ l'est aussi. Plus généralement, soit $\mathfrak{G}$ un pseudogroupe de transformations de $(X, \mathfrak{B})$ et soit $U \in \mathfrak{B}$ une grande partie de X; si $\mathfrak{G}_U$ est faiblement paradoxal, alors $\mathfrak{G}$ l'est aussi.

3. Paradoxes relatifs à une σ-algèbre

Un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$, comme à la section 2, est dit *fortement paradoxal* s'il existe X_1, X_2 avec $X = X_1 \coprod X_2$ et $X_j \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$ $(j=1,2)$, ce que nous abrégeons par $2X \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$.

Proposition 4. *On suppose que $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre. Alors $\mathfrak{G}$ est faiblement paradoxal si et seulement si $\mathfrak{G}$ est fortement paradoxal.*

Insistons sur le fait que $\mathfrak{G}$ est bien un pseudogroupe au sens précédent: la condition v) de la section 1 concerne toujours des recollements finis, même si $\mathfrak{B}$ est stable par réunions infinies dénombrables.

Lemme 5. *S'il existe $T, T' \in \mathfrak{B}$ avec $T \cap T' = \emptyset$ et $\gamma: X \to T$ dans $\mathfrak{G}$, alors il existe $\gamma'': X \to X - T'$ dans $\mathfrak{G}$.*

Preuve. Posons $U = \bigcup_{k \geqslant 0} \gamma^k(T')$, de sorte que $\gamma(U) = U - T'$. On définit $\gamma'' \in \mathfrak{G}$ de source X par $\gamma'x = x$ si $x \in X - U$ et $\gamma''x = \gamma x$ si $x \in U$. Le but de γ'' est $(X-U) \cup \gamma(U) = X - T'$. $\square$

Preuve de la proposition. Supposons $\mathfrak{G}$ faiblement paradoxal: il existe deux éléments $\gamma: X \to T$ et $\gamma': X \to T'$ de $\mathfrak{G}$ avec $T \cap T' = \emptyset$. Alors γ' et l'élément γ'' du lemme 5 sont des bijections dans $\mathfrak{G}$ ayant X pour source et dont les buts forment une partition de X. $\square$