$X - R, \gamma(X-R), ..., \gamma^{N-1}(X-R), \gamma^N(X)$ sont disjoints deux à deux. Posons $\gamma' = \gamma^N$, et soit γ'' la bijection de source X qui coïncide avec $\gamma^{j-1}(\delta_j)^{-1}$ sur T_j pour $j = 1, ..., N$. Comme les buts de γ' et γ'' sont disjoints, $\mathfrak{G}$ est faiblement paradoxal. □

Soient r et p des entiers avec $r \geqslant p \geqslant 1$. Comme nous l'avons déjà affirmé, il résulte de la proposition 3 que, si $\mathfrak{G}_p$ est faiblement paradoxal, alors $\mathfrak{G}_r$ l'est aussi. Plus généralement, soit $\mathfrak{G}$ un pseudogroupe de transformations de $(X, \mathfrak{B})$ et soit $U \in \mathfrak{B}$ une grande partie de X; si $\mathfrak{G}_U$ est faiblement paradoxal, alors $\mathfrak{G}$ l'est aussi.

3. Paradoxes relatifs à une σ-algèbre

Un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$, comme à la section 2, est dit *fortement paradoxal* s'il existe X_1, X_2 avec $X = X_1 \coprod X_2$ et $X_j \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$ $(j=1, 2)$, ce que nous abrégeons par $2X \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$.

Proposition 4. *On suppose que $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre. Alors $\mathfrak{G}$ est faiblement paradoxal si et seulement si $\mathfrak{G}$ est fortement paradoxal.*

Insistons sur le fait que $\mathfrak{G}$ est bien un pseudogroupe au sens précédent: la condition v) de la section 1 concerne toujours des recollements finis, même si $\mathfrak{B}$ est stable par réunions infinies dénombrables.

Lemme 5. *S'il existe $T, T' \in \mathfrak{B}$ avec $T \cap T' = \emptyset$ et $\gamma: X \to T$ dans $\mathfrak{G}$, alors il existe $\gamma'': X \to X - T'$ dans $\mathfrak{G}$.*

Preuve. Posons $U = \bigcup_{k \geqslant 0} \gamma^k(T')$, de sorte que $\gamma(U) = U - T'$. On définit $\gamma'' \in \mathfrak{G}$ de source X par $\gamma'x = x$ si $x \in X - U$ et $\gamma''x = \gamma x$ si $x \in U$. Le but de γ'' est $(X-U) \cup \gamma(U) = X - T'$. □

Preuve de la proposition. Supposons $\mathfrak{G}$ faiblement paradoxal: il existe deux éléments $\gamma: X \to T$ et $\gamma': X \to T'$ de $\mathfrak{G}$ avec $T \cap T' = \emptyset$. Alors γ' et l'élément γ'' du lemme 5 sont des bijections dans $\mathfrak{G}$ ayant X pour source et dont les buts forment une partition de X. □

Lorsque $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre, on peut donc dire sans ambiguïté que $\mathfrak{G}$ est *paradoxal* s'il l'est faiblement ou/et fortement. La condition ii) du théorème 1 peut s'écrire: $\mathfrak{G}_p$ est paradoxal pour p assez grand.

REMARQUE 6. *Le lemme 5 est équivalent à l'énoncé suivant, plus classique, du type Cantor-Bernstein:*

S'il existe $\delta: S \to R$ *et* $\delta': S' \to R'$ *dans* $\mathfrak{G}$ *avec* $R \subset S'$ *et* $R' \subset S$, *alors* $S' \equiv S \pmod{\mathfrak{G}}$.

Preuve. Posons $\gamma = \delta'\delta: S \to T$ et $T' = S - R'$; on a $T \subset R' \subset S$. Par le lemme 5 (appliqué dans S), il existe dans $\mathfrak{G}$ un élément $\gamma'': S \to R'$. Par suite $(\delta')^{-1}\gamma'': S \to S'$ est une équivalence dans $\mathfrak{G}$. □

COROLLAIRE 7. *On suppose que* $\mathfrak{B}$ *est une* σ*-algèbre. Soient* $U, V, U', V' \in \mathfrak{B}$ *des grandes parties avec* $U \subset U'$ *et* $V \subset V'$. *Si* $\mathfrak{G}_U$ *et* $\mathfrak{G}_V$ *sont paradoxaux, alors* $U' \equiv V' \pmod{\mathfrak{G}}$.

Preuve. Il suffit de montrer que $U' \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$. Comme U est grand, il existe un entier N et une bijection $\alpha: X \times \{1\} \to U_1$ dans $\mathfrak{G}_N$ avec $U_1 \subset U \times I_N$. Comme $\mathfrak{G}_U$ est paradoxal, il existe $\beta: U \times I_N \to U \times \{1\}$ dans $\mathfrak{G}_N$. La composition de α et β fournit une bijection $\gamma: X \to T$ de $\mathfrak{G}$ avec $T \subset U \subset U'$. On conclut en utilisant le lemme 5 (avec $T' = X - U'$). □

Notons que nous aurions pu formuler ce corollaire sans introduire U et V, car U est grand dans U', et par suite $\mathfrak{G}_{U'}$ est paradoxal vu la dernière remarque de la section 2. Mais l'énoncé choisi correspond mieux à l'utilisation en vue, pour l'exemple 3 de la section 5.

4. PARADOXES RELATIFS À L'ALGÈBRE DE TOUTES LES PARTIES

On se donne un ensemble X et un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de X, ou plus précisément de $(X, \mathfrak{P}(X))$. L'outil nouveau est un lemme de Kuratowski [K].

LEMME 8. *On se donne un ensemble* X, *deux partitions* $X = S \coprod T = U \coprod V$, *ainsi que deux bijections* $\varphi: S \to T$ *et* $\psi: U \to V$. *Alors il existe deux partitions*