4. Paradoxes relatifs à l'algèbre de toutes les parties

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Lorsque $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre, on peut donc dire sans ambiguïté que $\mathfrak{G}$ est *paradoxal* s'il l'est faiblement ou/et fortement. La condition ii) du théorème 1 peut s'écrire: $\mathfrak{G}_p$ est paradoxal pour p assez grand.

REMARQUE 6. *Le lemme 5 est équivalent à l'énoncé suivant, plus classique, du type Cantor-Bernstein:*

S'il existe $\delta : S \to R$ et $\delta' : S' \to R'$ dans $\mathfrak{G}$ avec $R \subset S'$ et $R' \subset S$, alors $S' \equiv S \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{G})$.

Preuve. Posons $\gamma = \delta'\delta : S \to T$ et $T' = S - R'$; on a $T \subset R' \subset S$. Par le lemme 5 (appliqué dans S), il existe dans $\mathfrak{G}$ un élément $\gamma'' : S \to R'$. Par suite $(\delta')^{-1}\gamma'' : S \to S'$ est une équivalence dans $\mathfrak{G}$. □

COROLLAIRE 7. *On suppose que $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre. Soient $U, V, U', V' \in \mathfrak{B}$ des grandes parties avec $U \subset U'$ et $V \subset V'$. Si $\mathfrak{G}_U$ et $\mathfrak{G}_V$ sont paradoxaux, alors $U' \equiv V' \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{G})$.*

Preuve. Il suffit de montrer que $U' \equiv X \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{G})$. Comme U est grand, il existe un entier N et une bijection $\alpha : X \times \{1\} \to U_1$ dans $\mathfrak{G}_N$ avec $U_1 \subset U \times I_N$. Comme $\mathfrak{G}_U$ est paradoxal, il existe $\beta : U \times I_N \to U \times \{1\}$ dans $\mathfrak{G}_N$. La composition de α et β fournit une bijection $\gamma : X \to T$ de $\mathfrak{G}$ avec $T \subset U \subset U'$. On conclut en utilisant le lemme 5 (avec $T' = X - U'$). □

Notons que nous aurions pu formuler ce corollaire sans introduire U et V, car U est grand dans U', et par suite $\mathfrak{G}_{U'}$ est paradoxal vu la dernière remarque de la section 2. Mais l'énoncé choisi correspond mieux à l'utilisation en vue, pour l'exemple 3 de la section 5.

4. PARADOXES RELATIFS À L'ALGÈBRE DE TOUTES LES PARTIES

On se donne un ensemble X et un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de X, ou plus précisément de $(X, \mathfrak{P}(X))$. L'outil nouveau est un lemme de Kuratowski [K].

LEMME 8. *On se donne un ensemble X, deux partitions $X = S \coprod T = U \coprod V$, ainsi que deux bijections $\varphi : S \to T$ et $\psi : U \to V$. Alors il existe deux partitions*

$$S = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant 4} S_j , \quad V = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant 4} V_j ,$$

avec

$$V_1 = S_1 , \quad V_2 = \varphi(S_2) , \quad V_3 = \psi(S_3) , \quad V_4 = \psi\varphi(S_4) .$$

Preuve. Considérons la bijection de X sur X qui coïncide avec φ sur S et avec φ^{-1} sur T; c'est une transformation de X sans point fixe et d'ordre 2, que nous notons encore φ. On étend de même ψ. Si $G = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) * (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ désigne le groupe diédral infini, φ et ψ définissent une action de G sur X.

Soit G_0 le sous-groupe de G engendré par $\psi\varphi$, qui est cyclique infini et normal dans G; soit $Y = X/G_0$ l'espace des orbites. Alors φ et ψ induisent sur Y la même transformation, que nous notons ρ et qui satisfait $\rho^2 = \mathrm{id}_Y$. Cette transformation est sans point fixe: sinon, il existerait $x \in X$ et $n \in \mathbf{Z}$ avec $\varphi(x) = (\psi\varphi)^n(x)$; or $\varphi(\psi\varphi)^n$ est conjugué soit à φ (si n est pair) soit à ψ (si n est impair), donc n'a pas de point fixe par hypothèse sur φ et ψ. Vu l'axiome du choix, il existe une partition $Y = Y' \coprod Y''$ telle que ρ échange Y' et Y''. Si $X = X' \coprod X''$ est la partition image inverse par la projection canonique $X \to Y$, alors X' et X'' sont échangés par φ et par ψ.

La bijection $\alpha : S \to X'$ définie par $\alpha(x) \in \{x, \varphi(x)\}$ montre que S et X' sont équivalents modulo le pseudogroupe engendré par φ, ce que nous écrivons $S \equiv X' \pmod{\varphi}$. De même $X' \equiv V \pmod{\psi}$. Par suite $S \equiv V \pmod{G}$. Plus précisément, on pose

$$S_1 = S \cap X' \cap V = V_1$$

$$\begin{aligned} S_2 &= S \cap X'' \cap \varphi(V) & V_2 &= T \cap X' \cap V \\ S_3 &= S \cap X' \cap U & V_3 &= \psi(S) \cap X'' \cap V \\ S_4 &= S \cap X'' \cap \varphi(U) & V_4 &= \psi(T) \cap X'' \cap V \end{aligned}$$

et on obtient l'affirmation du lemme. □

Remarques.

1) Le nombre 4 apparaissant dans le lemme 8 est le minimum possible [U].

2) La preuve ci-dessus est une variante de celle de Kuratowski. Le lemme résulte d'un travail de König datant de 1916; voir le § 5 de [Kö].

3) La preuve montre ceci: étant données deux actions sans point fixe du groupe à deux éléments sur X, il existe un domaine fondamental *commun*

$$X' = S_1 \cup \varphi(S_2) \cup S_3 \cup \varphi(S_4) = V_1 \cup V_2 \cup \psi^{-1}(V_3) \cup \psi^{-1}(V_4)$$

L'analogue mesurable de l'affirmation de la remarque 3 n'est pas correct, comme le montre l'exemple suivant.

On considère le cercle unité $\mathbf{S}^1$ du plan complexe et deux réflexions φ, ψ de $\mathbf{S}^1$ relatives à deux diamètres dont l'angle est un multiple irrationnel de π. Soit X l'espace $\mathbf{S}^1$ privé de l'ensemble dénombrable constitué par les points fixes des transformations $((\varphi\psi)^n\varphi)_{n\in\mathbf{Z}}$; on munit X de la σ-algèbre des ensembles mesurables au sens de Lebesgue. Il n'existe pas de sous-ensemble mesurable $X' \subset X$ qui soit un domaine fondamental pour $\{\mathrm{id}_X, \varphi\}$ et $\{\mathrm{id}_X, \psi\}$: en effet, un tel X' serait invariant par la transformation ergodique $\psi\varphi$, ce qui est absurde, car φ et ψ préservent la mesure de Lebesgue.

PROPOSITION 9. *Si* $\mathfrak{G}$ *est un pseudogroupe de transformations de* X *relatif à la* σ*-algèbre de toutes les parties, alors* $\mathfrak{G}$ *est virtuellement paradoxal si et seulement si* $\mathfrak{G}$ *est paradoxal.*

Preuve. On suppose $\mathfrak{G}$ virtuellement paradoxal, c'est-à-dire $\mathfrak{G}_p$ paradoxal pour un entier convenable p. En remplaçant au besoin p par un entier plus grand, on se ramène au cas d'une puissance de 2. Modulo une induction évidente, il suffit donc de considérer le cas $p = 2$.

L'hypothèse que X_2 est paradoxal signifie qu'il existe une partition $X_2 = U \coprod V$ avec $U \equiv X_2 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{G}_2)$ et $V \equiv X_2 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{G}_2)$. En posant $S = X \times \{1\}$ et $T = X \times \{2\}$, on obtient évidemment $X_2 = S \coprod T$ avec $S \equiv T \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{G}_2)$. Le lemme 8 montre que $S \equiv V \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{G}_2)$, donc que $X_2 \equiv X \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{G}_2)$. Cette dernière équivalence signifie précisément que X est paradoxal. □

Notons que notre proposition 9 résulte immédiatement du théorème 11 et du corollaire 12 de [BT].

COROLLAIRE 10. *Soit* $\mathfrak{G}$ *comme à la proposition 9. Si* $\mathfrak{G}$ *est paradoxal, deux grandes parties* S, S' *de* X *sont toujours équivalentes modulo* $\mathfrak{G}$.

Preuve. Vu le corollaire 7, il suffit de montrer que $\mathfrak{G}_S$ est paradoxal pour toute grande partie S de X.

Comme S est grand, il existe un entier N tel que $X \times \{1\}$ soit équivalent modulo $\mathfrak{G}_N$ à une partie de $S \times I_N = S_N$. Comme $\mathfrak{G}$ est paradoxal, $\mathfrak{G}_{S_N}$ l'est aussi (dernière remarque de la section 2); en d'autres termes, $\mathfrak{G}_S$ est virtuellement paradoxal. La proposition 9 montre que $\mathfrak{G}_S$ est paradoxal. □

On a donc:

THÉORÈME 11. *Soit* $\mathfrak{G}$ *un pseudogroupe de transformations d'un ensemble non vide* X, *relatif à l'algèbre* $\mathfrak{P}(X)$ *de toutes les parties de* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *n'est pas moyennable.*

ii) *Il existe un entier* $n \geqslant 2$ *et des parties* $S_1, ..., S_{n-1}, S_n, T_1, ..., T_{n-1}$ *de* X *avec*
— *les* S_j *sont équivalents deux à deux,*
— S_n *est grand,*
— T_k *est équivalent à une partie de* $S_k (k=1, ..., n-1)$,
— $\left(\coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} S_j \right) \subset \left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} T_k \right)$.

iii) $\mathfrak{G}$ *est (fortement) paradoxal: il existe une partition* $X = X_1 \coprod X_2$ *avec* $X_j \equiv X (\mathrm{mod}\ \mathfrak{G})$.

De plus, si ces conditions sont satisfaites, alors deux grandes parties quelconques de X *sont équivalentes modulo* $\mathfrak{G}$.

On connaît d'autres conditions équivalentes: voir par exemple [R1] pour des conditions à la Følner. Voir aussi le corollaire 3.5 de [R2]: toute action d'un groupe de génération finie et de croissance sous-exponentielle est moyennable.

5. Un développement et quelques exemples classiques

Soit $\mathfrak{G}$ un pseudogroupe de transformations d'un espace $(X, \mathfrak{B})$ donné avec un sous-ensemble non vide $U \in \mathfrak{B}$. (Le cas étudié plus haut correspond à $U = X$.) Rappelons que nous notons $\mathfrak{G}_U$ le pseudogroupe de transformations de $(U, \mathfrak{B}_U)$ défini par $\mathfrak{G}$. On appelle *moyenne invariante* pour le système $(X, U, \mathfrak{B}, \mathfrak{G})$ une fonction $\mu : \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ telle que

$$\mu(U) = 1,$$

$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \quad \text{pour} \quad S, T \in \mathfrak{B} \text{ avec } S \cap T = \emptyset,$$

$$\mu(T) = \mu(S) \quad \text{s'il existe} \quad \gamma : S \to T \text{ dans } \mathfrak{G}.$$

La notion est due à von Neumann [vN].