Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN RÉSULTAT DE TARSKI SUR LES ACTIONS MOYENNABLES DE GROUPES ET LES PARTITIONS PARADOXALES

Autor: de la Harpe, Pierre / Skandalis, Georges

Kapitel: 5. Un développement et quelques exemples classiques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55082

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 26.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

THÉORÈME 11. *Soit* $\mathfrak{G}$ *un pseudogroupe de transformations d'un ensemble non vide* X, *relatif à l'algèbre* $\mathfrak{P}(X)$ *de toutes les parties de* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *n'est pas moyennable.*

ii) *Il existe un entier* $n \geqslant 2$ *et des parties* $S_1, \ldots, S_{n-1}, S_n, T_1, \ldots, T_{n-1}$ *de* X *avec*
— *les* S_j *sont équivalents deux à deux,*
— S_n *est grand,*
— T_k *est équivalent à une partie de* $S_k (k=1, \ldots, n-1)$,
— $\left(\coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} S_j \right) \subset \left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} T_k \right)$.

iii) $\mathfrak{G}$ *est (fortement) paradoxal: il existe une partition* $X = X_1 \coprod X_2$ *avec* $X_j \equiv X (\mathrm{mod}\ \mathfrak{G})$.

De plus, si ces conditions sont satisfaites, alors deux grandes parties quelconques de X *sont équivalentes modulo* $\mathfrak{G}$.

On connaît d'autres conditions équivalentes: voir par exemple [R1] pour des conditions à la Følner. Voir aussi le corollaire 3.5 de [R2]: toute action d'un groupe de génération finie et de croissance sous-exponentielle est moyennable.

5. UN DÉVELOPPEMENT ET QUELQUES EXEMPLES CLASSIQUES

Soit $\mathfrak{G}$ un pseudogroupe de transformations d'un espace $(X, \mathfrak{B})$ donné avec un sous-ensemble non vide $U \in \mathfrak{B}$. (Le cas étudié plus haut correspond à $U = X$.) Rappelons que nous notons $\mathfrak{G}_U$ le pseudogroupe de transformations de $(U, \mathfrak{B}_U)$ défini par $\mathfrak{G}$. On appelle *moyenne invariante* pour le système $(X, U, \mathfrak{B}, \mathfrak{G})$ une fonction $\mu: \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ telle que

$$\mu(U) = 1,$$
$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \quad \text{pour} \quad S, T \in \mathfrak{B} \text{ avec } S \cap T = \emptyset,$$
$$\mu(T) = \mu(S) \quad \text{s'il existe} \quad \gamma: S \to T \text{ dans } \mathfrak{G}.$$

La notion est due à von Neumann [vN].

PROPOSITION 12. *On reprend les notations ci-dessus. Pour qu'il existe une moyenne invariante pour* $(X, U, \mathfrak{B}, \mathfrak{G})$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{G}_U$ *soit moyennable.*

Preuve. Supposons qu'il existe une moyenne $\mu : \mathfrak{B}_U \to [0, 1]$ invariante par $\mathfrak{G}_U$. Soit $S \in \mathfrak{B}$; s'il existe une $\mathfrak{B}$-partition $S = \coprod_{1 \leq j \leq n} S_j$, des sous-ensembles $U_1, ..., U_n$ de U et des éléments $\gamma_j : S_j \to U_j$ dans $\mathfrak{G}$ pour $j = 1, ..., n$, on pose $\mu_X(S) = \sum_{j=1}^{n} \mu(U_j)$; dans le cas contraire, on pose $\mu_X(S) = \infty$. On vérifie que $\mu_X : \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ est une moyenne invariante pour $(X, U, \mathfrak{B}, \mathfrak{G})$.

L'implication réciproque est (encore plus) banale. □

Avec les notations de la preuve, on peut remarquer que $\mu_X(X) < \infty$ si et seulement si la partie U est grande dans X.

Terminons en décrivant quelques exemples bien connus d'espaces paradoxaux.

Exemple 1 : groupes libres agissant librement

On considère le groupe libre non abélien $\mathbf{F}_2$ à deux générateurs a et b, qui agit sur lui-même par multiplication à gauche. Grâce à la proposition 3, on s'assure que l'espace obtenu est paradoxal (au sens faible) en considérant le sous-ensemble S de $\mathbf{F}_2$, constitué par les mots réduits de la forme $a^n w$ avec $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, w quelconque : en effet S, bS, b^2S sont disjoints deux à deux, et $S \cup aS = \mathbf{F}_2$.

On peut vérifier la paradoxalité forte sans l'aide de la proposition 4. Notons X_1 le sous-ensemble de $\mathbf{F}_2$ contenant les puissances a^n de a (où $n \in \mathbf{Z}$) et les mots réduits de la forme $a^n w$ avec $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $w \neq \emptyset$. Le complémentaire X_2 de X_1 consiste en les mots réduits de la forme $b^n w$ avec $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, w quelconque. On peut définir (presque comme dans [C]) deux bijections $\varphi_j : \mathbf{F}_2 \to X_j (j = 1, 2)$

$$\varphi_1(g) = \begin{cases} g & \text{si } g = a^n \text{ avec } n \in \mathbf{Z} \\ & \text{ou } g = a^n w \text{ avec } n > 0, \\ a^{-1}g & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$\varphi_2(g) = \begin{cases} g & \text{si } g = b^n w \text{ avec } n > 0, \\ & \\ b^{-1}g & \text{sinon}, \end{cases}$$

qui montrent que le $\mathbf{F}_2$-espace $\mathbf{F}_2$ est fortement paradoxal.

Il en résulte que le groupe $\mathbf{F}_2$ n'est pas moyennable.

Plus généralement, tout ensemble X sur lequel $\mathbf{F}_2$ agit librement est paradoxal (voir [vN], page 82). En effet, on peut choisir un domaine fondamental $T \subset X$ pour l'action, de sorte que X et $\mathbf{F}_2 \times T$ sont isomorphes en tant que $\mathbf{F}_2$-espaces (avec $\mathbf{F}_2$ agissant par multiplications à gauche sur le premier facteur de $\mathbf{F}_2 \times T$, et trivialement sur le second). Par suite, à tout paradoxe dans $\mathbf{F}_2$ constitué de bijections $\gamma_j : \mathbf{F}_2 \to T_j (j=1, 2)$, on peut associer un paradoxe dans $\mathbf{F}_2 \times T$ constitué des bijections $\gamma_j \times \mathrm{id}_T (j=1, 2)$.

Comme exemples d'actions libres de $\mathbf{F}_2$, citons:

1) La multiplication à gauche dans un sur-groupe de $\mathbf{F}_2$.
2) Les actions de $\mathbf{F}_2$ sur les sphères $\mathbf{S}^{2n+1} (n \geqslant 1)$ construites par Deligne et Sullivan [DS].

Exemple 2: groupes libres agissant avec isotropies abéliennes

Considérons d'abord l'action de $\mathbf{F}_2$ sur $\mathbf{F}_2 - \{1\}$ par automorphismes intérieurs. L'espace obtenu est paradoxal: en effet, si S est l'ensemble des mots réduits non vides de la forme $a^k w a^l$ avec $k, l \in \mathbf{Z}$ et $k, l \neq 0$, alors

1) $S \cup aSa^{-1} \cup a^{-1}Sa = \mathbf{F}_2 - \{1\}$,
2) $b^j S b^{-j} \cap b^k S b^{-k} = \emptyset$, $\quad j, k \in \mathbf{Z}$, $\quad j \neq k$.

Notons qu'on a de plus $S^{-1} = S$. Vu 1) et 2), il n'existe pas de moyenne invariante sur $\mathbf{F}_2 - \{1\}$: on dit que $\mathbf{F}_2$ n'est pas *intérieurement moyennable.*

Plus généralement, tout ensemble Z, sur lequel $\mathbf{F}_2$ agit de telle sorte que les groupes d'isotropie sont abéliens, est paradoxal. Notons $I(z)$ le groupe d'isotropie d'un point $z \in Z$ pour une telle action, et posons

$$X = \{z \in Z \mid I(z) = \{1\}\}, \qquad Y = Z - X.$$

Vu l'exemple 1, il suffit de vérifier que le $\mathbf{F}_2$-espace Y est paradoxal. Pour tout $y \in Y$, le groupe $I(y)$ est infini cyclique; on en choisit un générateur $c(y)$.

Notons que

$$c(gy) \in \{gc(y)g^{-1}, gc(y)^{-1}g^{-1}\}$$

pour tout $g \in \mathbf{F}_2$ et pour tout $y \in Y$. Posons

$$U = \{y \in Y \mid c(y) \in S\}.$$

Les parties aU, U, $a^{-1}U$ recouvrent Y par 1) et les parties $b^j U$ sont disjointes deux à deux ($j \in \mathbf{Z}$) par 2). Donc Y est paradoxal par une application immédiate de la proposition 3.

Mentionnons avant l'exemple 3 deux autres exemples d'actions de $\mathbf{F}_2$ à isotropies abéliennes

1) Le sous-groupe de $SL(2, \mathbf{Z})$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est isomorphe à $\mathbf{F}_2$ (exemple 1 de [He]), donc $\mathbf{F}_2$ agit naturellement sur $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ moins l'origine. Cette action est paradoxale.

2) Soient G un groupe et H un sous-groupe libre non abélien de G. On suppose que le centralisateur $I_g = \{h \in H \mid gh = hg\}$ est abélien pour tout $g \in G$ avec $g \neq 1$. Alors l'action de H sur $G - \{1\}$ par automorphismes intérieurs est paradoxale.

Nous avons retrouvé ainsi la proposition 4 et l'exemple 5 de [Ak]: le groupe G de 2) n'est pas intérieurement moyennable, et en particulier le produit semi-direct de $\mathbf{F}_2$ par $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ défini par l'action de 1) n'est pas intérieurement moyennable.

Exemple 3 : déplacements euclidiens d'un domaine du système solaire

On se donne un ouvert borné E de l'univers, contenant la lune et une pomme.

Soit B une boule de E de centre b. Dans l'action sur $B - \{b\}$ du groupe des rotations $SO(3)$, tous les groupes d'isotropie sont abéliens. Or $SO(3)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{F}_2$ (voir [Hf], ou [He]). Donc $B - \{b\}$ est paradoxal pour $SO(3)$.

Si $\mathfrak{G}$ désigne le pseudogroupe des déplacements euclidiens de E, toute partie $X \subset E$ d'intérieur non vide contient une grande partie $B - \{b\}$. Deux parties de E d'intérieurs non vides sont donc $\mathfrak{G}$-équivalentes par le corollaire 7: c'est le théorème III de l'introduction. Observons que, des sections précédentes, nous n'avons utilisé que la proposition. 3, le lemme 5 et le corollaire 7, qui sont indépendants du reste.

La même situation prévaut sur une sphère: la surface de mon jardin est équivalente à celle de Rome modulo le (pseudo)groupe des rotations, contrairement à l'opinion qui apparaît à la page 18 de [GU]. En revanche, le pseudogroupe des déplacements d'un ouvert borné du plan euclidien est moyennable. Nous ignorons s'il a jamais été fait usage d'un argument basé sur ces faits dans la controverse sur la rotondité de la terre.

Remarque. Dans les exemples qui précèdent, l'existence de paradoxes est liée à la présence de groupes libres non abéliens.

Considérons plus particulièrement un groupe G, agissant sur lui-même par multiplication à gauche. La question suivante apparaît implicitement dans [vN] et explicitement dans [K2]: l'existence d'un sous-groupe de G isomorphe à $\mathbf{F}_2$ est-elle équivalente à l'existence d'une décomposition paradoxale du G-espace G (i.e. à la non moyennabilité de G)?

La réponse semble être non: il existe des groupes paradoxaux (i.e. non moyennables) sans sous-groupe libre. C'est par exemple le cas des groupes de Burnside $B(2, p)$ pour p impair et p assez grand, où $B(2, p)$ est le quotient du groupe libre $\mathbf{F}_2$ par les relations $(w^p = 1)_{w \in \mathbf{F}_2}$: voir [O] et [Ad].

RÉFÉRENCES

[Ad] ADYAN, S. I. Random walks on free periodic groups. *Math. USSR Izvestiya 21 (3)* (1983), 425-434.

[Ak] AKEMANN, C. A. Operator algebras associated with Fuchsian groups. *Houston J. Math. 7* (1981), 295-301.

[BT] BANACH, S. et A. TARSKI. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fund. Math. 6* (1924), 244-277.

[BH] BÉDOS, E. et P. DE LA HARPE. Moyennabilité intérieure des groupes. *L'Enseignement Math. 32* (1986), 139-157.

[C] CONNES, A. Non commutative differential geometry. Chapter I. The Chern character in K-homology. *Publications Math. IHES N° 62* (1985), 41-144.

[DS] DELIGNE, P. and D. SULLIVAN. Division algebras and the Hausdorff-Banach-Tarski Paradox. *L'Enseignement Math. 29* (1983), 145-150.

[DE] DUBINS, L. E. et M. EMERY. Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski. *Gazette des Mathématiciens 12* (1979), 71-76.

[GU] GOSCINNY et UDERZO. *Astérix chez les Bretons.* Dargaud 1966.

[Hf] HAUSDORFF, F. *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit 1914.

[He] DE LA HARPE, P. Free groups in linear groups. *L'Enseignement Math. 29* (1983), 129-144.

[HS] HEWITT, E. and K. STROMBERG. *Real and abstract analysis.* Springer 1965.

[Ke] KESTEN, H. Symmetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc. 22* (1959), 336-354.

[K] KURATOWSKI, C. Une propriété des correspondances biunivoques. *Fund. Math. 6* (1924), 240-243.

[Kö] KÖNIG, D. Sur les correspondances multivoques des ensembles. *Fund. Math. 8* (1926), 114-134.