L'Enseignement Mathématique, t. 32 (1986), p. 139-157

MOYENNABILITÉ INTÉRIEURE DES GROUPES: DÉFINITIONS ET EXEMPLES

par Erik BÉDOS et Pierre DE LA HARPE

Dans leur étude des facteurs finis continus, Murray et von Neumann ont introduit la *propriété gamma* [MvN]. Elle leur a permis en particulier de montrer qu'il existe deux facteurs finis continus non isomorphes (agissant dans des espaces de Hilbert séparables), respectivement associés à un groupe localement fini et à un groupe libre. (Un troisième facteur ne sera mis en évidence par J. Schwartz que vingt ans plus tard: 1943-1963!)

Etant donné un groupe dénombrable Γ avec classes de conjugaison (autres que $\{1\}$) infinies, Effros a introduit une notion de *moyennabilité intérieure* [E] et a considéré les implications

$$\Gamma \text{ intérieurement moyennable} \overset{?}{\Rightarrow} \lambda(\Gamma)'' \text{ a la propriété gamma},$$

$$\Gamma \text{ non intérieurement moyennable} \Rightarrow \lambda(\Gamma)'' \text{ n'a pas la propriété gamma},$$

où $\lambda(\Gamma)''$ désigne le facteur associé à Γ. La seconde implication est facile à vérifier ([E], et ci-dessous), mais la première n'est toujours pas démontrée. (De fait nous avons autant envie d'en chercher un contre-exemple qu'une preuve, mais ceci n'est pas notre objet ici.) Mentionnons encore qu'un facteur fini continu n'a pas la propriété gamma si et seulement s'il est plein [C2], et qu'on a donc

$$\Gamma \text{ non intérieurement moyennable} \Rightarrow \lambda(\Gamma)'' \text{ est plein}.$$

* * *

L'objet du présent travail est d'étudier pour elle-même la notion de moyennabilité intérieure. Malgré des particularités essentielles, elle partage avec la notion usuelle de moyennabilité la qualité d'avoir un *grand nombre de définitions équivalentes*: existence d'une moyenne convenable, de suites de divers types, inexistence de décomposition paradoxale, propriété de contenance faible... Le théorème du § 1 expose en détail ces équivalences.

Ensuite, au § 2, nous énumérons quelques *conditions suffisantes* pour qu'un groupe soit intérieurement moyennable (Γ moyennable, Γ faiblement commutatif, ...) ou ne le soit pas (conséquence de la propriété T, existence de sous-groupes libres convenables, ...). Nous étudions aussi le comportement de la moyennabilité intérieure par *extensions* et *produits semi-directs.*

Enfin, le troisième paragraphe est de nature plus *géométrique*, et nous y indiquons de multiples exemples de groupes non intérieurement moyennables: sous-groupes non presque résolubles de $PSL(2, \mathbf{C})$, produits libres, et variantes.

Beaucoup des résultats qui suivent sont déjà connus. Nous les avons répétés en espérant que notre texte puisse être pris comme une *introduction* au sujet. Dans le même but, nous avons systématiquement omis de considérer des groupes munis de topologies non triviales; pour ceci, voir [Pi] et [LR].

Nous remercions chaleureusement G. Skandalis pour l'intérêt qu'il a manifesté à ce travail et pour les nombreuses améliorations qu'il nous a suggérées.

§ 1. Définitions équivalentes de la moyennabilité intérieure

On se donne un groupe (discret) Γ, non réduit à un élément. Pour simplifier la suite, nous supposons Γ dénombrable; mais l'usage de suites généralisées nous permettrait de généraliser sans peine à des groupes plus grands.

Une *moyenne intérieurement invariante* sur Γ est une mesure positive finiment additive de masse totale 1 sur $\Gamma - \{1\}$ qui est invariante par automorphismes intérieurs. On peut envisager une telle moyenne comme une application définie sur les sous-ensembles de $\Gamma - \{1\}$ à valeurs dans $[0, 1]$, ou comme une forme linéaire positive normalisée sur l'espace de Banach $l^\infty(\Gamma - \{1\})$. (Pour l'équivalence, voir [HeS], théorème 20.30.) Nous voulons montrer dans ce paragraphe que Γ possède une moyenne intérieurement invariante si et seulement s'il possède certaines autres propriétés, avant l'énoncé desquelles nous rappelons quelques faits et fixons nos notations.

Le groupe Γ opère dans l'espace de Hilbert $l^2(\Gamma)$ par les *représentations* régulières gauche λ et droite ρ, ainsi que par la représentation adjointe α:

$$\begin{aligned}
(\lambda(g)\xi)(h) &= \xi(g^{-1}h), \\
(\rho(g)\xi)(h) &= \xi(hg), \\
(\alpha(g)\xi)(h) &= \xi(g^{-1}hg), \quad g \in \Gamma, \quad \xi \in l^2(\Gamma), \quad h \in \Gamma.
\end{aligned}$$

On a $\alpha(g) = \lambda(g)\rho(g) = \rho(g)\lambda(g)$ pour tout $g \in \Gamma$. Nous notons δ la fonction caractéristique de $\{1\}$ dans Γ, et β la restriction de α à l'orthogonal $H_\beta = l^2(\Gamma)\Theta\mathbf{C}\delta$ de δ dans $l^2(\Gamma)$. On a donc $\alpha = \beta \oplus \varepsilon$, où ε désigne la représentation triviale de Γ dans $\mathbf{C}$.

L'espace de Banach $l^1(\Gamma)$ des fonctions sommables sur Γ s'identifie naturellement à un sous-espace (non fermé si Γ est infini) de $l^2(\Gamma)$ invariant par α. Nous notons $l^1(\Gamma)^+$ le cône des fonctions $\eta \in l^1(\Gamma)$ avec $\eta(g) \geqslant 0$ pour tout $g \in \Gamma$.

Nous écrivons $|S|$ le cardinal d'un ensemble fini S et $S\Delta T$ la différence symétrique de deux sous-ensembles S, T de Γ.

En vue de la condition (R) ci-dessous, notons que Γ est à *classes de conjugaison infinies*, ou en abrégé CCI, si et seulement si β ne contient pas ε (au sens fort). En effet, si $\Gamma - \{1\}$ contient une classe de conjugaison finie F, alors H_β contient un vecteur non nul fixé par $\beta(\Gamma)$, à savoir la fonction caractéristique de F. Réciproquement, si le vecteur non nul ξ de H_β est fixé par $\beta(\Gamma)$, alors l'ensemble fini $\{g \in \Gamma \mid |\xi(g)| > \frac{1}{n}\}$ est non vide pour un entier n assez grand, et il est réunion de classes de conjugaison.

Nous écrivons P_δ la projection orthogonale de $l^2(\Gamma)$ sur $\mathbf{C}\delta$. Si $M, \dots, N$ sont des ensembles d'opérateurs sur $l^2(\Gamma)$, alors $C^*(M, \dots, N)$ désigne la C^*-algèbre engendrée par la réunion $M \cup \dots \cup N$ dans l'algèbre d'opérateurs $L(l^2(\Gamma))$.

On dit qu'une bijection $\varphi : S \to T$ entre sous-ensembles de Γ est *intérieure par morceaux* s'il existe un sous-ensemble fini $\{f_1, \dots, f_k\} \subset \Gamma$ avec $\varphi(g) \in \{f_1 g f_1^{-1}, \dots, f_k g f_k^{-1}\}$ pour tout $g \in S$, c'est-à-dire s'il existe une partition $S = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant k} S_j$ avec $\varphi(g) = f_j g f_j^{-1}$ pour $g \in S_j$ et $j \in \{1, \dots, k\}$.

THÉORÈME 1. *Si Γ est un groupe dénombrable, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(M) *Il existe une moyenne intérieurement invariante sur Γ.*

(D_1) *Il existe une suite $(\eta_n)_{n \geqslant 1}$ dans $l^1(\Gamma)^+$ avec*

1°) $\eta_n(1) = 0$ *et* $\|\eta_n\|_1 = 1$ *pour tout* $n \geqslant 1$,

2°) $\lim_{n \to \infty} \|\alpha(g)\eta_n - \eta_n\|_1 = 0$ *pour tout* $g \in G$.

(D_2) *Il existe une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ dans $l^2(\Gamma)$ avec*

1°) $\xi_n(1) = 0$ *et* $\|\xi_n\|_2 = 1$ *pour tout* $n \geqslant 1$,

2°) $\lim_{n \to \infty} \|\alpha(g)\xi_n - \xi_n\|_2 = 0$ *pour tout* $g \in G$.

(F) *Il existe une suite* $(F_n)_{n \geqslant 1}$ *de sous-ensembles finis non vides de* $\Gamma - \{1\}$ *telle que* $\lim_{n \to \infty} |(gF_n g^{-1}) \Delta F_n \| F_n|^{-1} = 0$ *pour tout* $g \in \Gamma$.

(R) *La représentation* β *de* Γ *contient faiblement* ε.

(P) *On a* $P_\delta \notin C^*(\alpha(\Gamma))$.

(Ta) *Il n'existe pas de partition* $\Gamma - \{1\} = S_1 \coprod S_2$ *qui soit paradoxale, c'est-à-dire telle que la partie* S_j *soit donnée avec une bijection* $\varphi_j : \Gamma - \{1\} \to S_j$ *intérieure par morceaux* $(j = 1, 2)$.

Preuve. Nous établissons les équivalences

$$\begin{array}{ccccc} (M) & \overset{(1)}{\Leftrightarrow} & (D_1) & \overset{(2)}{\Leftrightarrow} & (D_2) \\ (3) \Updownarrow & & (4) \Updownarrow & & (5) \Updownarrow \\ (Ta) & & (F) & & (R) \overset{(6)}{\Leftrightarrow} (P). \end{array}$$

D'autres cheminements sont possibles. Par exemple, l'implication $(D_2) \Rightarrow (Ta)$ se montre comme le « lemme des 14 ε »: voir le lemme 6.2.2 de [MvN] ou le lemme 4.3.3 de [Sa]. Voir aussi [Pa] pour $(P) \Rightarrow (M)$.

(1) Preuve de $(M) \Leftrightarrow (D_1)$. L'équivalence est due à Effros [E], qui reprend un argument maintenant bien connu de Day (théorème 1 du N° 5 dans [Da] — voir aussi [Gr], § 2.4 et [Ey], § III). Le fait essentiel ici est que l'ensemble des vecteurs de norme 1 dans $l^1(\Gamma - \{1\})^+$ est dense dans l'ensemble des moyennes (= formes linéaires positives normalisées) sur $l^\infty(\Gamma - \{1\})$ pour la topologie faible $\sigma(l^\infty(\Gamma - \{1\})^*, l^\infty(\Gamma - \{1\}))$.

(2) Preuve de $(D_1) \Leftrightarrow (D_2)$. Si $(\eta_n)_{n \geqslant 1}$ est comme dans (D_1), on pose $\xi_n(g) = (\eta_n(g))^{1/2}$ et on obtient (D_2). Réciproquement, si $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ est comme dans (D_2), on pose $\eta_n(g) = |\xi_n(g)|^2$ et on obtient (D_1). Les conditions (2°) résultent de l'inégalité de Hölder et des inégalités suivantes, valables pour $a, b, p \in \mathbf{R}$ avec $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $p \geqslant 1$ (ici $p = 2$):

$$|a - b|^p \leqslant |a^p - b^p| \leqslant p\,|a - b\|a^{p-1} + b^{p-1}|.$$

On laisse au lecteur le plaisir de remplacer (D_2) par (D_p) dans l'énoncé.

(3) Preuve de $(M) \Leftrightarrow (Ta)$. Pour l'application $(M) \Rightarrow (Ta)$, on montre banalement la contraposée. Supposons en effet qu'il existe une partition $\Gamma - \{1\} = S_1 \coprod S_2$ et des bijections $\varphi_j : \Gamma - \{1\} \to S_j$ intérieures par morceaux

($j=1, 2$). S'il existait une moyenne intérieurement invariante μ sur Γ, on aurait $\mu(\Gamma-\{1\}) = \mu(S_j)$, et $1 = \mu(\Gamma-\{1\}) = \mu(S_1) + \mu(S_2) = 2$ qui est absurde. Donc la condition (M) n'est pas vérifiée.

L'implication $(Ta) \Rightarrow (M)$ est un cas particulier d'un résultat de Tarski (théorème 16.12 (ii) de [Ta]) pour lequel nous renvoyons à une rédaction expositoire motivée par le présent travail [HaS].

La négation de la condition (Ta) admet plusieurs variantes. Nous renvoyons à [HaS] pour certaines d'entre elles, mais en citons néanmoins une qu'on peut dégager de [MvN].

(Ta') Il existe $S \subset \Gamma - \{1\}$, un entier $n \geqslant 2$ et $a_1, ..., a_{n-1}, a_n, b_1, ..., b_{n-1} \in \Gamma$ avec les $a_j S a_j^{-1}$ disjoints deux à deux ($1 \leqslant j \leqslant n$) et avec $\Gamma - \{1\} = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} b_k S b_k^{-1}$.

(4) Preuve de $(D_1) \Leftrightarrow (F)$. Il est évident que (F) implique (D_1). En effet, si $(F_n)_{n \geqslant 1}$ est comme dans (F), on pose $\eta_n = |F_n|^{-1}\chi_n$ où χ_n est la fonction caractéristique de F_n, de sorte que $\|\alpha(g)\eta_n - \eta_n\|_1 = |gF_n g^{-1} \Delta F_n| \, |F_n|^{-1}$ pour tout $g \in \Gamma$.

L'implication $(D_1) \Rightarrow (F)$ suit sa « variante moyennable » due à Følner [Fo], simplifiée par Namioka [Na], et reformulée par Connes (N° 2.1 de [C1]). Répétons ceci:

LEMME. *Pour tout nombre réel* $a > 0$, *notons* $E_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *la fonction caractéristique de* $]a, \infty[$. *Soit* S *un ensemble et soit* $l^1(S)^+$ *le cône des fonctions sommables de* S *dans* $\mathbf{R}_+$.

On se donne $\eta_0, \eta_1, ..., \eta_k \in l^1(S)^+$ *avec* $\eta_0 \neq 0$ *et* $\varepsilon > 0$. *Si* $\|\eta_j - \eta_0\|_1 < \varepsilon \|\eta_0\|_1$ *pour* $j = 1, ..., k$, *alors il existe* $a > 0$ *avec* $E_a(\eta_0) \neq 0$ *et*

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \| E_a(\eta_j) - E_a(\eta_0) \|_1 \leqslant \varepsilon \| E_a(\eta_0) \|_1 .$$

Preuve du lemme. On a pour $t, t' \in \mathbf{R}_+$

$$\int_0^\infty | E_a(t) - E_a(t') | \, da = | t - t' |$$

donc pour $\eta, \eta' \in l^1(S)^+$

$$\int_0^\infty \| E_a(\eta) - E_a(\eta') \|_1 \, da = \| \eta - \eta' \|_1$$

par Fubini. Par suite

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \| E_a(\eta_j) - E_a(\eta_0) \|_1 \, da = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \| \eta_j - \eta_0 \|_1 \leqslant \varepsilon \| \eta_0 \|_1$$

$$= \varepsilon \int_0^{\infty} \| E_a(\eta_0) \|_1 \, da$$

et il existe $a > 0$ avec les propriétés voulues. □

Preuve de $(D_1) \Rightarrow (F)$. On se donne $g_1, \dots, g_k \in \Gamma$ et $\varepsilon > 0$, et on choisit δ avec $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{k}$. Si Γ vérifie (D_1), il existe un vecteur unité $\eta \in l^1(\Gamma - \{1\})^+$ avec $\| \alpha(g_j)\eta - \eta \|_1 < \delta$ pour $j = 1, \dots, k$. Vu le lemme (appliqué à $\eta_0 = \eta$ et $\eta_j = \alpha(g_j)\eta$), il existe $a > 0$ avec $E_a(\eta) \neq 0$ et

$$\| E_a(\alpha(g_j)\eta) - E_a(\eta) \|_1 \leqslant k\delta \| E_a(\eta) \|_1 < \varepsilon \| E_a(\eta) \|_1$$

pour $j = 1, \dots, k$. Soit $F = \eta^{-1}(]a, \infty[) \subset \Gamma - \{1\}$ le support de $E_a(\eta)$, qui est non vide car $E_a(\eta) \neq 0$. Le support de $E_a(\alpha(g_j)\eta)$ est $g_j F g_j^{-1}$ et l'inégalité précédente implique

$$| g_j F g_j^{-1} \Delta F | = \| E_a(\alpha(g_j)\eta) - E_a(\eta) \|_1 < \varepsilon | F |$$

pour $j = 1, \dots, k$. On obtient une suite de Følner en variant le sous-ensemble fini $\{g_1, \dots, g_k\}$ de Γ et le nombre ε.

Pour un résultat plus général, voir [Ro].

(5) Preuve de $(D_2) \Leftrightarrow (R)$. Cette équivalence n'est qu'une reformulation. En effet, (R) signifie qu'il existe une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ de vecteurs de norme 1 dans $l^2(\Gamma) \ominus \mathbf{C}\delta$ telle que $\lim_{n \to \infty} (\beta(g)\xi_n | \xi_n) = 1$ pour tout $g \in \Gamma$. Et ceci s'écrit aussi $\lim_{n \to \infty} \| \beta(g)\xi_n - \xi_n \|_2 = 0$, vu l'identité $\| \xi' - \xi \|_2^2 = 2 - 2Re(\xi' | \xi)$ pour deux vecteurs ξ' et ξ de norme unité.

(6) Preuve de $(R) \Leftrightarrow (P)$. D'abord une observation générale: soit $\sigma : A \to L(H_\sigma)$ une représentation d'une C^*-algèbre A contenant faiblement une représentation $\pi : A \to L(H_\pi)$, et soit P la projection orthogonale de $H_\sigma \oplus H_\pi$ sur H_π; alors $P \notin (\sigma \oplus \pi)(A)$.

En effet, s'il existait $a \in A$ avec $P = (\sigma \oplus \pi)(a)$, on aurait $\sigma(a) = 0$ et $\pi(a) = 1$, en contradiction avec l'hypothèse de contenance faible $\mathrm{Ker}(\sigma) \subset \mathrm{Ker}(\pi)$. Pour l'équivalence entre cette définition de la contenance faible et celle utilisée ci-dessus en (5), voir si nécessaire les N$^{\text{os}}$ 3.4.4-5 et 18.1.3-4 de [Di1].

L'implication $(R) \Rightarrow (P)$ résulte de cette observation (pour $\sigma = \beta$ et $\pi = \varepsilon$). Avant de montrer la réciproque, introduisons la condition

(Q) Il existe une famille finie $\{g_1, \ldots, g_k\} \subset \Gamma$ et un entier $n \geqslant 1$ tels que, pour tout vecteur unité $\xi \in H_\beta = l^2(\Gamma) \ominus \mathbf{C}\delta$, on ait

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Re}(\beta(g_j)\xi \mid \xi) \leqslant k - \frac{1}{n}.$$

Preuve de $(Q) \Rightarrow$ *non*(P). Supposons que Γ satisfait (Q) et posons

$$X = \sum_{j=1}^{k} \alpha(g_j) + \alpha(g_j)^* \in C^*(\alpha(\Gamma)) \subset L(l^2(\Gamma)).$$

Cet opérateur autoadjoint laisse invariants les sous-espaces H_β et $H_\varepsilon = \mathbf{C}\delta$ de $l^2(\Gamma)$. La condition (Q) exprime que sa compression X_β à H_β vérifie $X_\beta \leqslant 2\left(k - \frac{1}{n}\right)$, et sa compression à H_ε est évidemment $2k$. La fonction f définie par $f(t) = 1$ pour $t \leqslant 2\left(k - \frac{1}{n}\right)$ et $f(2k) = 0$ est donc continue sur le spectre de X, et on peut identifier X_β et $f(X)$. Par suite $X_\beta \in C^*(\alpha(\Gamma))$ et $P_\delta = \frac{1}{2k}(X - X_\beta) \in C^*(\alpha(\Gamma))$, de sorte que la condition (P) n'est pas satisfaite.

Preuve de $(P) \Rightarrow (R)$. Si la condition (P) est satisfaite, la négation de (Q) l'est aussi : pour toute famille finie $\{g_1, \ldots, g_k\}$ de Γ, il existe une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ de vecteurs unité dans H_β avec $\lim_{n \to \infty} (\beta(g_j)\xi_n \mid \xi_n) = 1$ pour $j = 1, \ldots, k$. Ceci implique bien que la condition (R) est vérifiée.

Cette preuve nous a été communiquée par G. Skandalis ; elle s'inspire de la preuve de $(d) \Rightarrow (c)$, pour le théorème 2.1 de [C2].

La preuve du théorème 1 est ainsi achevée. On dit qu'un groupe $\Gamma \neq \{1\}$ est *intérieurement moyennable* s'il satisfait les conditions du théorème. On convient que le groupe réduit à un élément est intérieurement moyennable.

* * *

Terminons ce paragraphe par quelques observations sur la propriété gamma.

1) Si M est un ensemble d'opérateurs sur $l^2(\Gamma)$, nous notons M'' l'algèbre de von Neumann qu'il engendre. Considérons le cas particulier d'un groupe Γ

qui est CCI, c'est-à-dire le cas où $\lambda(\Gamma)''$ est un facteur, ou encore autrement dit le cas où $C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma))$ agit irréductiblement sur $l^2(\Gamma)$. On sait que l'intersection d'une C^*-algèbre irréductible avec l'algèbre $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts est ou bien nulle, ou bien égale à $\mathcal{K}$ (corollaire 4.1.10 de [Di1]). Par suite (P) est équivalent pour un groupe CCI à

(P') $\quad \mathcal{K} \cap C^*(\alpha(\Gamma)) = \{0\}$.

D'autre part, un résultat de Connes (théorème 2.1 de [C2]) exprime que $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma si et seulement si

(C) $\quad \mathcal{K} \cap C^*(\lambda(\Gamma)'', \rho(\Gamma)'') = \{0\}$.

Enfin, on a évidemment

$$C^*(\alpha(\Gamma)) \subset C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma)) \subset C^*(\lambda(\Gamma)'', \rho(\Gamma)'') .$$

Par suite, si le facteur $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma, alors le groupe Γ est intérieurement moyennable. Cette implication est à l'origine du travail d'Effros, comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction.

2) Soit Γ un groupe CCI satisfaisant la condition (F) avec de plus $\sup |F_n| < \infty$, par exemple un groupe faiblement commutatif (voir § 2). Pour tout $n \geqslant 1$, notons χ_n la fonction caractéristique de F_n, qui est un élément de trace nulle dans le facteur $\lambda(\Gamma)''$. Pour tout $g \in \Gamma$, il existe un entier n_g avec $gF_ng^{-1} = F_n$, donc tel que g et χ_n commutent dans $\lambda(\Gamma)''$, pour $n \geqslant n_g$. Par suite $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma (proposition 1.10 de [Di2]).

On peut sans doute encore montrer que $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma lorsque Γ est un groupe CCI satisfaisant la « condition de Følner forte » suivante :

(F_f) Il existe une suite $(F_n)_{n \geqslant 1}$ de sous-ensembles finis non vides de $\Gamma - \{1\}$ telle que, pour tout $g \in \Gamma$, il existe un entier n_g avec $gF_ng^{-1} = F_n$ pour $n \geqslant n_g$.

3) Pour d'autres relations entre la moyennabilité intérieure de Γ et les propriétés de $\lambda(\Gamma)''$, voir [Ch1].

§ 2. Conditions suffisantes

Rappelons qu'un groupe satisfait la *propriété T de Kazhdan* si la représentation triviale ε (de dimension 1) est isolée dans le dual unitaire du groupe, ou encore si toute représentation unitaire du groupe contenant faiblement ε contient nécessairement ε au sens fort (lemme 1 de [DK]). Rappelons aussi qu'un groupe Γ est dit *faiblement commutatif* si, pour toute partie finie F de Γ, il existe $g \neq 1$ dans Γ commutant aux éléments de F (c'est la condition (c) du lemme 6.1.1 de [MvN]). Un groupe $\Gamma \neq \{1\}$ de génération finie est faiblement commutatif si et seulement si son centre n'est pas réduit à un élément. Mais il existe des groupes CCI faiblement commutatifs; citons:

— Le groupe des permutations de $\mathbf{N}$ à supports finis, de même que son produit direct avec tout groupe CCI.

— La somme restreinte d'une famille infinie dénombrable de groupes CCI.

— Les groupes construits par McDuff [MD] pour exhiber une infinité non dénombrable de facteurs finis continus non isomorphes deux à deux.

COROLLAIRE 2. *Pour qu'un groupe* Γ *soit intérieurement moyennable, il suffit qu'il vérifie l'une des conditions suivantes:*

(i) Γ *est moyennable.*

(ii) *Il existe dans* $\Gamma - \{1\}$ *une classe de conjugaison finie.*

(iii) Γ *est un produit direct* $\Gamma' \times \Gamma''$ *avec* Γ' *intérieurement moyennable et non réduit à* $\{1\}$.

(iv) *Il existe une suite exacte* $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ *avec* Γ' *intérieurement moyennable et* Γ'' *moyennable.*

(v) Γ *possède une famille* $(\Gamma_i)_{i \in I}$ *de sous-groupes intérieurement moyennables, avec* $\Gamma = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$.

(vi) Γ *est faiblement commutatif.*

(vii) Γ *est* CCI *et le facteur* $\lambda(\Gamma)''$ *possède la propriété gamma.*

Preuve. La suffisance de (i) est standard (lemmes 1.1.1 et 1.1.3 de [Gr]), celle de (ii) est banale, et celle de (v) se montre comme pour le cas moyennable (théorème 1.2.7 de [Gr]).

Pour (iii), considérons une moyenne intérieurement invariante μ' sur Γ'. On définit une moyenne intérieurement invariante μ sur Γ en posant pour toute partie S de $\Gamma - \{1\}$:

$$S' = S \cap ((\Gamma' - \{1\}) \times \{1\})$$

$$\mu(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S' = \emptyset, \\ \mu'(S') & \text{sinon}. \end{cases}$$

Supposons la condition (iv) vérifiée. Le groupe $\mathrm{Aut}(\Gamma')$ de tous les automorphismes de Γ' opère naturellement sur le convexe compact non vide C des moyennes intérieurement invariantes sur Γ', et l'action de tout automorphisme intérieur est banale par définition; par suite le quotient $\mathrm{Out}(\Gamma') = \mathrm{Aut}(\Gamma')/\mathrm{Int}(\Gamma')$ opère sur C. L'homomorphisme naturel $\Gamma'' \to \mathrm{Out}(\Gamma')$ associé à la suite exacte fournit donc une action affine de Γ'' sur C. Comme Γ'' est moyennable, l'action possède un point fixe μ qui est une moyenne intérieurement invariante sur Γ à support dans $\Gamma' - \{1\}$.

Nous avons déjà discuté la suffisance de (vii) à la fin du § 1, et celle de (vi) en résulte par le lemme 6.1.1 de [MvN]. On peut aussi observer que tout groupe dénombrable faiblement commutatif possède une suite de Følner $(F_n)_{n \geqslant 1}$ comme à la condition (F) du théorème 1, avec de plus $| F_n | = 1$ pour tout $n \geqslant 1$. □

La condition (vi) permet notamment de retrouver l'exemple du théorème 3 de [CC], qui est la somme restreinte d'une famille infinie dénombrable de groupes libres non abéliens. (C'est un exemple de groupe intérieurement moyennable dont la C^*-algèbre réduite est simple à trace unique.)

COROLLAIRE 3. *Pour qu'un groupe* Γ *soit non intérieurement moyennable, il suffit qu'il vérifie l'une des conditions suivantes:*

(i) Γ *est* CCI *et satisfait la propriété* T.

(ii) *Il existe une suite exacte* $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ *avec* Γ' *et* Γ'' *non intérieurement moyennables.*

(iii) Γ *possède un sous-groupe libre non abélien* $\mathbf{F}$ *tel que le centralisateur* $I_g = \{f \in \mathbf{F} \mid gf = fg\}$ *est abélien pour tout* $g \in \Gamma$ *avec* $g \neq 1$.

Preuve. Supposons la condition (i) vérifiée et considérons la représentation β de Γ dans $l^2(\Gamma) \ominus \mathbf{C}\delta$: elle ne contient pas fortement ε, car Γ est CCI; elle ne contient donc pas non plus faiblement ε, car Γ a la propriété T. On a donc la négation de la condition (R) du théorème 1.

Pour (ii), montrons la contraposée, et supposons donc qu'il existe une moyenne intérieurement invariante μ sur $\Gamma - \{1\}$. Si le support de μ rencontre $\Gamma' - \{1\}$, le groupe Γ' est intérieurement moyennable. Sinon, on définit une moyenne intérieurement invariante μ'' sur Γ'' en posant $\mu''(S) = \mu(\pi^{-1}(S))$ pour tout $S \subset \Gamma''$, où π désigne la surjection de Γ sur Γ''.

Pour (iii), nous renvoyons à l'exemple 2 de la section 5 dans [HaS]. □

La suffisance de (i) est due à Connes, Akemann et Walter [AW]; c'est aussi un cas particulier du théorème 2 de [LR]. La suffisance de (iii) est due à Akemann; elle est utilisée pour l'exemple 5 de [Ak], qui est un produit semi-direct de $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ et d'un groupe libre non abélien sur deux générateurs. (C'est un exemple de groupe non intérieurement moyennable dont la C^*-algèbre réduite n'est pas simple et possède plusieurs traces; pour d'autres exemples, voir le théorème 4 de [CC], et le produit semi-direct de $\mathbf{Z}^3$ et $SL(3, \mathbf{Z})$ considéré ci-dessous. Notons encore que tout groupe moyennable non trivial est intérieurement moyennable avec C^*-algèbre réduite non simple; enfin, les groupes du § 3 ci-dessous sont non intérieurement moyennables et ont des C^*-algèbres réduites simples à trace unique. La réponse à la question (1) de la section 2 de [Ha] est donc aussi négative que possible.)

EXEMPLES AVEC PRODUITS SEMI-DIRECTS

On considère un produit semi-direct Γ donné sous la forme d'une extension scindée

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Gamma' \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & \Gamma'' \arrow[r] \arrow[l, bend left] & 1 . \end{tikzcd}$$

Lorsque le produit est direct, les corollaires 2 et 3 montrent que Γ est intérieurement moyennable si et seulement si l'un au moins des groupes Γ', Γ'' l'est. La situation pour les produits semi-directs est différente.

Pour tout $n \in \{2, 3, ..., \infty\}$, notons $\mathbf{F}_n$ le groupe non abélien libre à n générateurs. Ce groupe n'est pas intérieurement moyennable. (C'est le lemme 6.2.2 de [MvN]; voir aussi la section 5 de [HaS] et le § 3 ci-dessous.) Soit $\pi : \mathbf{F}_2 \to \mathbf{Z}$ une surjection. Son noyau est isomorphe à $\mathbf{F}_\infty$, d'où un produit semi-direct

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathbf{F}_\infty \arrow[r] & \mathbf{F}_2 \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[l, bend left] & 1 \end{tikzcd} \qquad \text{(A)}$$

avec $\Gamma' = \mathbf{F}_\infty$ et $\Gamma = \mathbf{F}_2$ non intérieurement moyennables, bien que $\Gamma'' = \mathbf{Z}$ soit moyennable.

Nous avons déjà fait allusion à un produit semi-direct de $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ et $\mathbf{F}_2$ pour lequel Γ' est moyennable alors que Γ et Γ'' ne sont pas intérieurement moyennables. Avant de décrire un second exemple, montrons:

LEMME 4. *Les produits semi-directs*

$$G = SL(3, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^3 \quad \textit{et} \quad \Gamma = SL(3, \mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^3$$

possèdent la propriété T *de Kazhdan.*

Preuve. Soit $\rho : G \to U(H)$ une représentation unitaire contenant faiblement la représentation triviale $\varepsilon : G \to U(\mathbf{C}) = \mathbf{S}^1$. Alors la restriction π de ρ à $SL(3, \mathbf{R})$ contient faiblement la représentation triviale de $SL(3, \mathbf{R})$. Ce groupe possédant la propriété T [DK], il existe un vecteur unité $\xi \in H$ avec $\pi(h)\xi = \xi$ pour tout $h \in SL(3, \mathbf{R})$. Notons $f : G \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $f(g) = (\rho(g)\xi \mid \xi)$, qui vaut 1 sur $SL(3, \mathbf{R})$. On a $f(hgh^{-1}) = f(g)$ pour tout $h \in SL(3, \mathbf{R})$ et pour tout $g \in G$. Comme l'action de $SL(3, \mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^3$ possède un orbite dense (le complémentaire de l'origine), il en résulte que f est constante sur G, donc que ρ contient fortement ε. Ainsi G possède la propriété T.

Comme Γ est de covolume fini dans G, il possède aussi la propriété T. □

Le lemme 4 fournit un nouvel exemple de produit semi-direct

$$1 \to \mathbf{Z}^3 \to SL(3, \mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^3 \to SL(3, \mathbf{Z}) \to 1 \qquad \text{(B)}$$

avec noyau moyennable et les deux autres groupes non intérieurement moyennables.

En posant enfin

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \mathbf{F}_\infty \times \mathbf{Z}^3 , \\ \Gamma &= \mathbf{F}_2 \times \big(SL(3, \mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^3\big) , \\ \Gamma'' &= \mathbf{Z} \times SL(3, \mathbf{Z}) , \end{aligned}$$

on obtient par produit direct à partir de (A) et (B) une extension scindée

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Gamma' \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & \Gamma'' \arrow[r] \arrow[l, bend left] & 1 \end{tikzcd}$$

où Γ' et Γ'' sont intérieurement moyennables et où Γ ne l'est pas. On trouve d'autres résultats sur la moyennabilité intérieure des produits semi-directs dans [Ch2].

Soit Γ' un sous-groupe d'indice fini d'un groupe Γ. Quelles sont les relations entre la moyennabilité intérieure de Γ' et celle de Γ? (Voir ajout.)

§ 3. Exemples de groupes non intérieurement moyennables

Le corollaire 3 (i) fournit à volonté des groupes non intérieurement moyennables qui apparaissent naturellement en géométrie.

En effet, soit G un groupe de Lie réel connexe semi-simple à centre trivial dont chaque composante simple est de rang réel au moins 2, et soit Γ

un réseau dans G; plus simplement, soit par exemple $\Gamma = PSL(n, \mathbf{Z})$ avec $n \geqslant 3$. On sait que Γ est un groupe à classes de conjugaison infinies (chap. I de [Ra]), qu'il possède la propriété T [DK], et qu'il n'est donc pas intérieurement moyennable. Pour le facteur associé, voir [C3].

Voici d'autres exemples.

THÉORÈME 5. *Si un groupe* Γ *admet l'une au moins des descriptions suivantes, alors* Γ *n'est pas intérieurement moyennable et le facteur* $\lambda(\Gamma)''$ *est plein.*

(a) Γ *est un sous-groupe de* $PSL(2, \mathbf{R})$ *qui n'est pas résoluble.*

(b) Γ *est un sous-groupe de* $PSL(2, \mathbf{C})$ *qui ne contient pas de sous-groupe résoluble d'indice fini.*

(c) Γ *est un produit libre* $H * K$ *où* H *possède au moins* 2 *et* K *au moins* 3 *éléments.*

(d) $\Gamma = H *_A K$ *est un produit libre avec amalgamation sur un sous-groupe* $A \neq \{1\}$ *de* H *et* K *tel que, pour tout sous-ensemble fini* F *de* $\Gamma - \{1\}$, *il existe* $g \in \Gamma$ *avec* $g^{-1}Fg \cap A = \emptyset$.

(e) $\Gamma = HNN(H, A, \Theta)$ *est une extension à la G. Higman, B.H. Neumann et H. Neumann avec* $|H/A| \geqslant 3$ *telle que, pour tout sous-ensemble fini* F *de* $\Gamma - \{1\}$, *il existe* $g \in \Gamma$ *avec* $g^{-1}Fg \cap A = \emptyset$.

(f) Γ *est un produit direct d'un nombre fini de groupes apparaissant dans les classes (a) à (e).*

La liste de ce théorème est en substance bien connue. Pour les groupes de (a) et (b) qui sont discrets, voir [HJ]. Pour ceux de (c) et de nombreux groupes de (a), voir [Ak]. Pour la plupart des groupes de (d) et (e), voir [B1] et [B2]. Pour (f), voir le corollaire 3 (ii). Ce que nous croyons être nouveau ci-dessous est l'usage d'un argument simple commun à presque tous les cas du théorème (seul cas plus compliqué: classe (b) lorsqu'il y a de la 2-torsion).

* * *

Un homéomorphisme φ d'un espace topologique séparé Ω est dit *hyperbolique* s'il existe deux points fixes distincts s_φ, r_φ de φ dans Ω avec les propriétés suivantes:

pour tout voisinage S de s_φ et pour tout voisinage R de r_φ, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que $\varphi^n(\Omega - S) \subset R$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Un tel homéomorphisme φ n'a pas d'autres points fixes que sa *source* s_φ et son *but* r_φ; pour tout entier $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$, on vérifie que $\psi = \varphi^k$ est aussi hyperbolique avec

$$s_\psi = \begin{cases} s_\varphi & \text{si} \quad k > 0 \\ r_\varphi & \text{si} \quad k < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad r_\psi = \begin{cases} r_\varphi & \text{si} \quad k > 0 \\ s_\varphi & \text{si} \quad k < 0 . \end{cases}$$

Nous excluons désormais le cas où Ω ne contient pas au moins 3 points distincts; s'il existe un homéomorphisme hyperbolique de Ω, cet espace est donc toujours infini.

LEMME 6. *Soit φ un homéomorphisme hyperbolique d'un espace topologique séparé infini Ω; soient S' (respectivement R') un voisinage de s_φ (respectivement r_φ), et F un sous-ensemble fini de $\Omega - \{s_\varphi, r_\varphi\}$. Alors il existe un voisinage S de s contenu dans S' et un entier $k \geqslant 1$ tels que l'homéomorphisme $\psi = \varphi^k$ ait les propriétés*

(i) $S \subset S'$ *et* $R = \Omega - \psi(S) \subset R'$,

(ii) $S \subset \psi(S)$,

(iii) F *est dans l'intérieur de* $D = \psi(S) - S$,

(iv) $\Omega - \{s_\psi, r_\psi\} = \coprod_{n \in \mathbf{Z}} \psi^n(D)$ *où* $\coprod$ *désigne une réunion disjointe.*

Preuve. Comme Ω est séparé, il existe des voisinages disjoints deux à deux S'', V, R'' de s_φ, F, r_φ respectivement avec $S'' \subset S'$ et $R'' \subset R'$. Par hyperbolicité de φ vers la source, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que $\varphi^{-n}(S'') \subset S''$ pour tout entier $n \geqslant n_0$. On pose $S = \bigcap_{j=0}^{n_0 - 1} \varphi^{-j}(S'')$ de sorte que $S \subset S''$ et $S \subset \varphi(S)$. Par hyperbolicité de φ vers le but, il existe un entier $k > 0$ tel que $\varphi^n(\Omega - S) \subset R''$, donc en particulier tel que $S \cup V \subset \varphi^n(S)$ pour tout $n \geqslant k$. On pose $\psi = \varphi^k$ et $R = \Omega - \psi(S) = \psi(\Omega - S)$. Reste à vérifier (iv).

Soit $D = \psi(S) - S$. Il est évident que les ensembles $\psi^n(D)$ sont disjoints deux à deux ($n \in \mathbf{Z}$). Soit $\omega \in \Omega - \{s_\psi, r_\psi\}$. Vu que $\psi^n(\omega)$ tend vers s_ψ (respectivement r_ψ) quand n tend vers $-\infty$ (respectivement ∞), il existe $m \in \mathbf{Z}$ avec $\psi^{m-1}(\omega) \in S$ et $\psi^m(\omega) \notin S$, donc avec $\psi^m(\omega) \in D$. □

L'espace Ω étant comme plus haut, deux homéomorphismes hyperboliques φ et ψ de Ω sont *transverses* s'ils n'ont pas de point fixe commun. Dans ce cas, il existe une suite infinie $(n_j)_{j=1,2,\dots}$ d'entiers telle que les homéomorphismes hyperboliques $\varphi^{n_j}\psi\varphi^{-n_j}$ $(j = 1, 2, \dots)$ soient transverses deux à deux.

Proposition 7. *Soient Ω un espace topologique séparé infini et Γ un groupe d'homéomorphismes de Ω contenant deux homéomorphismes hyperboliques transverses. S'il existe une application Γ-équivariante $\delta : \Gamma - \{1\} \to \Omega$ (pour l'action de Γ sur lui-même par automorphismes intérieurs), alors Γ n'est pas intérieurement moyennable.*

Preuve. Soient $g, h \in \Gamma$ deux éléments hyperboliques transverses. Quitte à remplacer g par une puissance convenable, on déduit du lemme qu'il existe un voisinage S_g de s_g tel que

(i) s_h, r_h sont dans l'intérieur de $D_g = g(S_g) - S_g$

(ii) $\Omega - \{s_g, r_g\} = \coprod_{n \in \mathbf{Z}} g^n(D_g)$.

Quitte à remplacer ensuite h par une puissance convenable, on s'assure de même qu'il existe un voisinage S_h de s_h tel que

(iii) S_h et $R_h = \Omega - h(S_h)$ sont dans D_g

(iv) $\Omega - \{s_h, r_h\} = \coprod_{n \in Z} h^n(D_h)$ avec $D_h = \Omega - (S_h \cup R_h)$.

Posons enfin

$$T = \{k \in \Gamma - \{1\} \mid \delta(k) \in S_g \cup R_g\}.$$

On a $\Omega = (S_g \cup R_g) \cup g(S_g \cup R_g)$, donc $\Gamma - \{1\} = T \cup gTg^{-1}$. On a aussi $S_g \cup R_g \subset D_h$, donc les $h^n(S_g \cup R_g)$ sont des parties de Ω disjointes deux à deux, et par suite les $h^n T h^{-n}$ sont disjoints deux à deux dans $\Gamma (n \in \mathbf{Z})$. Par suite Γ ne satisfait pas la condition (Ta'), donc Γ n'est pas intérieurement moyennable. (Voir la preuve de $(M) \Leftrightarrow (Ta)$ au § 1.) □

Preuve du théorème.

Classe (a). On choisit pour Ω le disque unité fermé du plan complexe sur lequel $PSL(2, \mathbf{R})$, déguisé en $PSU(1, 1)$, agit par transformations linéaires fractionnaires. On définit $\delta(k)$ comme étant l'attracteur de k si k est hyperbolique et le point fixe de k dans Ω sinon. L'hypothèse que Γ n'est pas résoluble implique que Γ contient deux hyperboliques transverses (détails dans [Ha]). Notons que le choix de δ est limité; pour tout $g \in \Gamma - \{1\}$, on doit en effet avoir en vertu de l'équivariance $g\delta(g) = \delta(ggg^{-1}) = \delta(g)$.

Classe (b). On choisit pour Ω la réunion de l'espace hyperbolique de dimension 3 (dont $PSL(2, \mathbf{C})$ est le groupe des isométries préservant l'orientation) et de son bord (sur lequel l'action de $PSL(2, \mathbf{C})$ s'étend naturellement); Ω est donc une boule fermée de dimension 3.

Supposons d'abord que Γ ne contienne aucun élément $g \neq 1$ avec $g^2 = 1$. On définit $\delta(k)$ comme pour la classe (a) si k est hyperbolique ou parabolique. Sinon, k est elliptique: c'est une rotation d'angle $\Theta_k \in]0, \pi[$ autour d'une droite hyperbolique d_k; on choisit pour $\delta(k)$ le point à l'infini de d_k donné par la règle du tire-bouchon.

Pour le cas général, reprenons la preuve légèrement plus compliquée de [HJ]. On choisit deux hyperboliques $g, h \in \Gamma$ avec les propriétés suivantes:

(1) Il existe un domaine D_g limité par deux hyperplans de Ω tel que $\Omega - \{s_g, r_g\} = \coprod_{n \in \mathbf{Z}} g^n(D_g)$; on pose $E = \{s_g, r_g\} \cup \coprod_{n \text{ pair}} g^n(D_g)$.

(2) Il existe un domaine D_h limité par deux hyperplans de Ω tel que $\Omega - D_h \subset D_g$. On note S_h la composante connexe de $\Omega - D_h$ contenant s_h.

(3) Toute droite hyperbolique de Ω dont les deux points à l'infini sont dans E ne rencontre pas $\Omega - D_h$.

On définit alors T comme l'ensemble des $k \in \Gamma$ ayant au moins un point fixe dans E et n'ayant pas de point fixe dans S_h.

Classes (c), (d), (e). L'espace Ω est la réunion du graphe X et de l'espace L de ses bouts, comme définis dans [Ha]. On prend pour $\delta(k)$ l'attracteur de k dans L si k est hyperbolique et le point fixe de k dans X si k est elliptique. □

COROLLAIRE 8. *Si* Γ *est un groupe admettant une présentation avec* $n \geqslant 3$ *générateurs et une seule relation, alors* Γ *n'est pas intérieurement moyennable.*

Preuve. Si la relation ne contient qu'un générateur, Γ est décrit comme dans la classe (c) du théorème 5. Si la relation contient au moins deux générateurs, on peut la supposer cycliquement réduite, et il suffit de contempler les lemme 11.8, théorème 5.1 (cas 1 de la preuve) et théorème 11.9 dans [Z]. □

Soit Γ le groupe des classes d'applications d'une surface close orientable de genre $g \geqslant 3$. (On suppose $g \geqslant 3$ pour que Γ soit à centre trivial [Ma].) Le théorème 5 s'applique-t-il à Γ, avec une preuve en termes de l'action naturelle de Γ sur la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller de la surface?

RÉFÉRENCES

[Ak] AKEMANN, C. A. Operator algebras associated with Fuchsian groups. *Houston J. of Math. 7* (1981), 295-301.

[AW] AKEMANN, C. A. and M. E. WALTER. Unbounded negative definite functions. *Can. J. of Math. 33* (1981), 862-871.

[B1] BÉDOS, E. Operator algebras associated with free products of groups with amalgamation. *Math. Ann. 266* (1984), 279-286.

[B2] —— Operator algebras associated with *HNN* extensions. Oslo 1983.

[CC] CHODA, H. and M. CHODA. Fullness, simplicity and inner amenability. *Math. Japonica 24* (1979), 235-246.

[Ch1] CHODA, M. The factors of inner amenable groups. *Math. Japonica 24* (1979), 145-152.

[Ch2] —— Effect of inner amenability on strong ergocicity. *Math. Japonica 28* (1983), 109-115.

[C1] CONNES, A. On the classification of von Neumann algebras and their automorphisms. *Symp. Math. 20* (1976), 435-478.

[C2] —— A classification of injective factors. *Ann. of Math. 104* (1976), 73-115.

[C3] —— A factor of type II_1 with countable fundamental group. *J. Operator Theory 4* (1980), 151-153.

[Da] DAY, M. M. Amenable semigroups. *Ill. J. Math. 1* (1957), 509-544.

[DK] DELAROCHE, C. et K. K. KIRILLOV. Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés (d'après D. A. Kajdan). *Séminaire Bourbaki*, Exposé 343, juin 1968.

[Di1] DIXMIER, J. *Les C*-algèbres et leurs représentations.* Gauthier-Villars 1964.

[Di2] —— Quelques propriétés des suites centrales dans les facteurs de type II_1. *Inventiones Math. 7* (1969), 215-225.

[E] EFFROS, E. G. Property Γ and inner amenability. *Proc. Amer. Math. Soc. 47* (1975), 483-486.

[Ey] EYMARD, P. Initiation à la théorie des groupes moyennables. *Lecture Notes in Math. 497* (Springer 1975), 89-107.

[Fø] FØLNER, E. On groups with full Banach mean value. *Math. Scand. 3* (1955), 243-254.

[Gr] GREENLEAF, F. P. *Invariant means and topological groups.* Von Nostrand 1965.

[HJ] DE LA HARPE, P. et K. JHABVALA. Quelques propriétés des algèbres d'un groupe discontinu d'isométries hyperboliques. *Monographie 29 de l'Enseignement math.* (1981), 47-55.

[Ha] DE LA HARPE, P. Reduced C^*-algebras of discrete groups which are simple with a unique trace. *Lecture Notes in Math. 1132* (Springer 1985), 230-253.

[HaS] DE LA HARPE, P. et G. SKANDALIS. Un résultat de Tarski sur les actions moyennables de groupes et les partitions paradoxales. *L'Enseignement Math. 32* (1986), 121-138.

[HeS] HEWITT, E. and K. STROMBERG. *Real and abstract analysis.* Springer 1965.

[LR] LOSERT, V. and H. RINDLER. Conjugation-invariant means. A paraître in *Colloq. Math.*

[Ma] MACLACHLAN, C. On the centres of mapping class groups of surfaces. In *Groups-St. Andrews 1981, London Math. Soc. Lecture Notes 71* (Cambridge Univ. Press 1982), 261-269.

[MD] MCDUFF, D. Uncountably many II_1-factors. *Ann. of Math. 90* (1969), 372-377.

[MvN] MURRAY, F. D. and J. VON NEUMANN. On rings of operators *IV*. *Ann. of Math. 44* (1943), 716-808.
[Na] NAMIOKA, I. Følner's conditions for amenable semigroups. *Math. Scand. 15* (1964), 18-28.
[Pa] PASCHKE, W. Inner amenability and conjugation operators. *Proc. Amer. Math. Soc. 71* (1978), 117-118.
[Pi] PIER, J. P. Quasi-invariance intérieure sur les groupes localement compacts. *Actes du 6e Congrès des Math. d'Exp. latine*, Luxembourg 1981 (Gauthier-Villars 1982), 431-436.
[Ra] RAGHUNATHAN, M. S. *Discrete subgroups of Lie groups*. Springer 1972.
[Ro] ROSENBLATT, J. M. A generalization of Følner's condition. *Math. Scand. 33* (1973), 153-170.
[Sa] SAKAI, S. *C*-algebras and W*-algebras*. Springer 1971.
[Ta] TARSKI, A. *Cardinal algebras*. Oxford Univ. Press 1949.
[Z] LYNDON, R. C. and P. E. SCHUPP. *Combinatorial group theory*. Springer 1977.

AJOUT, DÉCEMBRE 1985

En complément au corollaire 2, notons qu'un groupe Γ est intérieurement moyennable dès qu'il satisfait à l'une des conditions suivantes:

(viii) Γ agit sur un ensemble non vide X muni d'une moyenne Γ-invariante μ de telle sorte que l'isotropie $I(x)$ soit intérieurement moyennable pour tout $x \in X$.

(ix) Γ possède un sous-groupe intérieurement moyennable Γ' d'indice fini.

(x) Il existe une suite exacte $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ avec Γ'' intérieurement moyennable, de même que $\{ g \in \Gamma \mid ghg^{-1}h^{-1} \in \Gamma' \}$ pour tout $h \in \Gamma - \Gamma'$.

L'assertion (ix) résulte de (viii), pour l'action de Γ sur $X = \Gamma/\Gamma'$; elle répond partiellement à la dernière question du § 2. L'assertion (x) résulte aussi de (viii), pour l'action de Γ sur $\Gamma'' - 1$. L'assertion (viii) est « du type Fubini » et se montre comme suit (voir aussi la proposition 3.5 de l'article de Rosenblatt cité ci-dessous).

Soient $Y = \{ x \in X \mid I(x) = 1 \}$ et $Z = X - Y$; soit D un domaine fondamental, c'est-à-dire un sous-ensemble de X rencontrant chaque Γ-orbite en un unique point. Si $\mu(Y) \neq 0$ alors Γ est moyennable car, après normalisation, $S \mapsto \mu(SD)$ est une moyenne invariante sur Γ. Si $\mu(Y) = 0$ on choisit pour tout $x \in Z \cap D$ une moyenne intérieurement invariante μ_x sur $l^\infty(I(x)-1)$;

pour $f \in l^\infty(\Gamma - 1)$ on définit $\tilde{f} \in l^\infty(Z)$ par $\tilde{f}(gx) = \int_{I(x)} f(ghg^{-1})d\mu_x(h)$ pour $g \in \Gamma$ et $x \in D \cap Z$; alors $f \mapsto \int_Z \tilde{f}(z)d\mu(z)$ est une moyenne intérieurement invariante sur $l^\infty(\Gamma - 1)$.

L'assertion (viii) a une variante classique: si Γ agit sur un ensemble X possédant une moyenne Γ-invariante μ de telle sorte que $I(x)$ est moyennable pour tout $x \in X$, alors Γ est moyennable (même preuve, avec $\tilde{f}(gx) = \int_{I(x)} f(gh)d\mu_x(h)$). On peut donc généraliser la troisième condition du corollaire 3 en

(iii′) Si Γ possède un sous-groupe non moyennable Γ' tel que le centralisateur $I_g = \{h \in \Gamma' \mid gh = hg\}$ est moyennable pour tout $g \in \Gamma - 1$, alors Γ n'est pas intérieurement moyennable

(considérer l'action de Γ' sur $X = \Gamma - 1$). Il en résulte par exemple que $SO(3)$ n'est pas intérieurement moyennable (considérer $\Gamma' = \Gamma$). Il en résulte aussi qu'il existe un groupe (construit par Ol'shanskii) dont tous les sous-groupes propres sont cycliques et qui n'est pas intérieurement moyennable.

Enfin, il nous paraît utile de compléter comme suit les références.

Ol'shanskii, A. Yu. On the problem of the existence of an invariant mean on a group. *Russian Math. Surveys 35 (4)* (1980), 180-181.

Paterson, A. L. T. Non amenability and Borel paradoxical decompositions for locally compact groups. *Proc. Amer. Math. Soc. 96* (1986), 89-90.

Pier, J. P. *Amenable locally compact groups.* Wiley 1984.

Rosenblatt, J. M. Uniqueness of invariant means for measure-preserving transformations. *Trans. Amer. Math. Soc. 265* (1981), 623-636.

Wagon, S. *The Banach-Tarski paradox.* Cambridge Univ. Press 1985.

(Reçu le 22 janvier 1985)

Erik Bédos

Matematisk Institutt
Universitetet i Oslo
Blindern Oslo 3

Pierre de la Harpe

Section de Mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
1211 Genève 24

vide-leer-empty