CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS DE LA DOUBLE FLÈCHE

Autor(en): **Burgermeister, Pierre-François**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-55086

L'Enseignement Mathématique, t. 32 (1986), p. 199-210

CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS DE LA DOUBLE FLÈCHE

par Pierre-François BURGERMEISTER

On connaît depuis assez longtemps la classification des représentations de la double flèche. J. Dieudonné [1] l'a obtenue pour un corps algébriquement clos, après avoir dressé un bref historique de la question. L'intérêt du présent article est de donner un traitement nouveau et particulièrement simple du problème. De plus, on prendra ici, comme corps de base, un corps commutatif quelconque.

Cet article est une version légèrement remaniée du travail de diplôme que j'ai présenté à l'Université de Genève. J'ai bénéficié pour l'élaborer de l'aide du professeur M. Kervaire; je tiens à lui exprimer ici mes remerciements.

1. INTRODUCTION

Soit k un corps. Une k-représentation de la double flèche est la donnée de 2 espaces vectoriels sur k de dimensions finies, E et F, et de 2 applications linéaires f_1 et f_2, de E dans F. On note: $E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$.

Deux représentations, $E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$ et $E' \underset{f'_2}{\overset{f'_1}{\rightrightarrows}} F'$, sont isomorphes s'il existe $\varphi: E \to E'$ et $\psi: F \to F'$, des isomorphismes d'espaces vectoriels, tels que le diagramme double

$$\begin{array}{ccc} E & \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} & F \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ E' & \underset{f'_2}{\overset{f'_1}{\rightrightarrows}} & F' \end{array}$$

commute. C'est-à-dire: $\psi f_1 = f'_1\varphi$ et $\psi f_2 = f'_2\varphi$.

La somme directe de 2 représentations est définie par:

$$\left(E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F\right) \oplus \left(E' \underset{f'_2}{\overset{f'_1}{\rightrightarrows}} F'\right) = E\oplus E' \underset{f_2\oplus f'_2}{\overset{f_1\oplus f'_1}{\rightrightarrows}} F\oplus F',$$

où $(f_i\oplus f'_i)(x+x') = f_i(x)+f'_i(x')$, $\forall x \in E$, $\forall x' \in E'$.

Les représentations sont en correspondance bijective avec les A-modules, où A est une algèbre de dimension finie [2]. Dans ce contexte, on peut appliquer le théorème de Krull-Schmidt ([3], p. 128), d'où il découle qu'une représentation se décompose de manière unique (à isomorphisme près, et à l'ordre des facteurs près) en une somme directe de représentations indécomposables. La classification s'obtient alors en dressant la liste de toutes les représentations indécomposables (à isomorphisme près).

2. Généralités

Il est clair qu'une représentation $E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$ est indécomposable si et seulement si la représentation duale, $F^* \underset{f_2^*}{\overset{f_1^*}{\rightrightarrows}} E^*$, est indécomposable. On peut donc se limiter à l'étude des représentations indécomposables $A: E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$, avec $\dim E \leqslant \dim F$.

Cas triviaux

a) Supposons $K = \operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2 \neq 0$. Alors A, indécomposable, se réduit à: $K \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} 0$ et, nécessairement, $\dim K = 1$. Ecrivons $k \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} 0$ la représentation ainsi obtenue et notons-la B_0.

b) Supposons $\operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2 \subsetneq F$, et soit $G \neq 0$, un supplémentaire de $\operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2$ dans F. A se réduit donc à $0 \rightrightarrows G$, et de nouveau, on doit avoir $\dim G = 1$. Ecrivons $0 \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} k$ cette représentation et notons-la C_0.

B_0 et C_0 sont 2 représentations indécomposables. Pour la suite nous supposons

$$1)\quad \operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2 = 0$$

$$2)\quad \operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2 = F$$

CAS GÉNÉRAL

Soit $A : E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$, une représentation indécomposable avec $\dim E = n$, $\dim F = n+l$, $n \geqslant 1$ et $l \geqslant 0$ des entiers, A vérifiant les hypothèses 1 et 2 ci-dessus.

Nous allons mettre en évidence certains sous-espaces de E et de F qui nous permettront d'obtenir une décomposition de A. Cette décomposition étant par hypothèse triviale, nous pourrons en tirer, cas par cas, toutes les conclusions nécessaires à l'identification de A.

Notons n_1 et n_2 les dimensions des noyaux de f_1 et f_2 respectivement, et posons $m = n_1+n_2$ et $W = \operatorname{Im} f_1 \cap \operatorname{Im} f_2 \subset F$. Alors, $\dim W = n-m-l$.

En effet, $\dim \operatorname{Im} f_1 + \dim \operatorname{Im} f_2 = n-n_1 + n-n_2 = 2n-m$. Par l'hypothèse 2, $\dim W = 2n-m-(n+l) = n-m-l$.

D'autre part, soit $V = f_1^{-1}(W) \cap f_2^{-1}(W) \subset E$. Alors, $\dim V \geqslant n-m-2l$.

En effet, $\dim f_1^{-1}(W) = n-m-l+n_1 = n-n_2-l$, et de même $\dim f_2^{-1}(W) = n-n_1-l$. Donc, $\dim f_1^{-1}(W) + \dim f_2^{-1}(W) = 2n-m-2l$ et $\dim V \geqslant 2n-m-2l-n = n-m-2l$. Posons $\dim V = n-m-2l+r$, $r \geqslant 0$.

Nous avons une sous-représentation, $V = \underset{\operatorname{res} f_2}{\overset{\operatorname{res} f_1}{\rightrightarrows}} W$, avec $\dim V = n-m-2l+r$, $\dim W = n-m-l$.

Posons maintenant $K_1 = \operatorname{Ker} f_1 \cap V$ et $k_1 = \dim K_1$, et soit un sous-espace K'_1 tel que $\operatorname{Ker} f_1 = K_1 \oplus K'_1$. Notons $k'_1 = \dim K'_1$; alors $n_1 = k_1+k'_1$. On peut encore choisir un supplémentaire L_1 tel que $f_1^{-1}(W) = V \oplus K'_1 \oplus L_1$. Soit $l_1 = \dim L_1$; alors $l_1 = n-n_2-l-(n-m-2l+r)-k'_1 = k_1+l-r$.

De la même manière, on choisit une décomposition $f_2^{-1}(W) = V \oplus K'_2 \oplus L_2$.

La somme $(V \oplus K'_1 \oplus L_1) + (K'_2 \oplus L_2)$ est une somme *directe*.

En effet, soit $x \in V \oplus K'_1 \oplus L_1 \cap K'_2 \oplus L_2$. Alors $x \in f_1^{-1}(W) \cap f_2^{-1}(W) = V$. Mais $V \cap (K'_2 \oplus L_2) = 0$, d'où $x = 0$.

Calculons la dimension d du sous-espace $V \oplus K'_1 \oplus L_1 \oplus K'_2 \oplus L_2$: $d = n-m-2l+r+k'_1+k_1+l-r+k'_2+k_2+l-r = n-r$. Choisissons alors $X \subset E$, un sous-espace de dimension r tel que

$$E = V \oplus K'_1 \oplus L_1 \oplus K'_2 \oplus L_2 \oplus X\,.$$

Soit maintenant $Y = f_1(X) + f_2(X) \subset F$. Alors,

$$F = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = W + f_2(K'_1) + f_2(L_1) + f_1(K'_2) + f_1(L_2) + Y\,.$$

La dimension de F est inférieure ou égale à s, la somme des dimensions des sous-espaces du membre de droite:

$$n+l \leqslant s \leqslant n-m-l+k'_1+k_1+l-r+k'_2+k_2+l-r+2r = n+l\,.$$

Par conséquent:

i) $K'_1 \overset{\operatorname{res} f_2}{\to} f_2(K'_1)$, $L_1 \overset{\operatorname{res} f_2}{\to} f_2(L_1)$, $K'_2 \overset{\operatorname{res} f_1}{\to} f_1(K'_2)$,

$L_2 \overset{\operatorname{res} f_1}{\to} f_1(L_2)$,

sont des isomorphismes.

ii) $\dim Y = 2r$.

iii) $F = W \oplus f_2(K'_1) \oplus f_2(L_1) \oplus f_1(K'_2) \oplus f_1(L_2) \oplus Y$.

On a obtenu la description suivante de la structure de A:

$$E = V \oplus K'_1 \oplus L_1 \oplus K'_2 \oplus L_2 \oplus X\,,$$

$$F = W \oplus f_2(K'_1) \oplus f_2(L_1) \oplus f_1(K'_2) \oplus f_1(L_2) \oplus Y\,,$$

où $V \oplus L_1 \oplus L_2 \rightrightarrows W \oplus f_2(L_1) \oplus f_1(L_2)$, $K'_1 \rightrightarrows f_2(K'_1)$, $K'_2 \rightrightarrows f_1(K'_2)$ et $X \rightrightarrows Y$ sont des sommands directs. A étant indécomposable, elle se réduit à l'un de ces 4 sommands.

Elimination des cas simples

1) Si A est du type $K'_1 \underset{\operatorname{res} f_2}{\overset{0}{\rightrightarrows}} f_2(K'_1)$, elle n'est indécomposable que si $\dim K'_1 = 1$ et elle est alors isomorphe à la représentation $E \underset{1}{\overset{0}{\rightrightarrows}} E$ où $\dim E = 1$. Appelons $\overline{A_1^x}$ cette représentation indécomposable. (Cette notation et les suivantes seront justifiées au § 3).

2) De même, si A est du type $K'_2 \underset{0}{\overset{\operatorname{res} f_1}{\rightrightarrows}} f_1(K'_2)$, elle est isomorphe à la

représentation indécomposable $E \overset{1}{\underset{0}{\rightrightarrows}} E$, où $\dim E = 1$, que nous appellerons A_1^x.

3) Si A est du type $X \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} Y$, alors, comme $\dim Y = 2 \dim X$, A n'est indécomposable que si $\dim X = 1$, $\dim Y = 2$ et $Y = f_1(X) \oplus f_2(X)$. Elle est alors isomorphe à la représentation suivante, notée matriciellement:

$E \overset{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\underset{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{\rightrightarrows}} F$ (avec $\dim E = 1$, $\dim F = 2$). Nous appellerons B_1 cette représentation indécomposable.

Il ne reste plus qu'à considérer le cas où A est donnée par

$$E = V \oplus L_1 \oplus L_2 \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} W \oplus f_2(L_1) \oplus f_1(L_2) = F,$$

avec
$$\dim V = n-m-2l, \quad \dim W = n-m-l, \qquad (*)$$
$$\dim L_1 = n_1 + l, \quad \dim L_2 = n_2 + l.$$

Remarquons que dans ce cas $\operatorname{Ker} f_1 = K_1 \subset V$ et $\operatorname{Ker} f_2 = K_2 \subset V$.

Nous allons étudier ce cas en trois parties correspondant aux différentes valeurs de l: $l = 0$, $l = 1$, $l \geqslant 2$. Pour cela, nous utiliserons le

LEMME. *Soit A une représentation comme ci-dessus. Si la sous-représentation $V \overset{\operatorname{res} f_1}{\underset{\operatorname{res} f_2}{\rightrightarrows}} W$ est décomposable, A est décomposable.*

Preuve. Supposons $V = S \oplus S' \overset{\operatorname{res} f_1}{\underset{\operatorname{res} f_2}{\rightrightarrows}} T \oplus T' = W$, une décomposition non triviale. $f_1(S) \subset T$, $f_1(S') \subset T'$. Soient T_1 un supplémentaire de $f_1(S)$ dans T et T'_1 un supplémentaire de $f_1(S')$ dans T'. On peut choisir une décomposition $L_1 = U_1 \oplus U'_1$ telle que $f_1(U_1) = T_1$ et $f_1(U'_1) = T'_1$.

De même on peut choisir $L_2 = U_2 \oplus U'_2$ telle que $f_2(U_2) \subset T$ et $f_2(U'_2) \subset T'$.

On obtient alors la décomposition suivante de A:

$$(S \oplus U_1 \oplus U_2) \oplus (S' \oplus U'_1 \oplus U'_2) \rightrightarrows (T \oplus f_2(U_1) \oplus f_1(U_2)) \\ \oplus (T' \oplus f_2(U'_1) \oplus f_1(U'_2))$$

3. La classification

3.1. Premier cas: $l = 0$

Soit A une représentation indécomposable du type (*) avec $l = 0$. En particulier:

$$\dim E = \dim F = n\,; \quad \dim V = \dim W = n-m\,; \quad \dim L_1 = n_1\,; \\ \dim L_2 = n_2\,.$$

Proposition. *L'une au moins des deux applications f_1 ou f_2 est un isomorphisme.*

Preuve. Par récurrence sur n.

Si $n = 1$, c'est trivial.

Si $n > 1$, on envisage deux cas:

1) $m = 0$, et alors f_1 et f_2 sont des isomorphismes.

2) $m > 0$, et on regarde $V \underset{\operatorname{res} f_2}{\overset{\operatorname{res} f_1}{\rightrightarrows}} W$ qui est indécomposable (par le lemme) et où $\dim V = \dim W < n$.

Par hypothèse de récurrence, res (f_1) — ou res (f_2) — est un isomorphisme. Alors $L_1 = 0$. Et puisque $f_1 : L_2 \to f_1(L_2)$ est un isomorphisme, $f_1 : E = V \oplus L_2 \to W \oplus f_1(L_2) = F$ est un isomorphisme. A isomorphisme près, on est alors ramené à classer les représentations $E \underset{f_2}{\overset{1}{\rightrightarrows}} E$ et $E \underset{1}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} E$.

Remarquons que si f_1 est inversible, $E \underset{1}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} E$ est isomorphe à $E \underset{f_1^{-1}}{\overset{1}{\rightrightarrows}} E$.

Pour les représentations du type $E \underset{f_2}{\overset{1}{\rightrightarrows}} E$, on regarde E comme $k[x]$-module où l'action de x est donnée par $x \cdot v = f_2(v)$, $\forall v \in E$. E est un $k[x]$-module indécomposable (sinon il y aurait une décomposition de E en sous-espaces stables par f_2 ce qui est impossible puisque A est indécomposable). Il est donc de la forme $k[x]/(p^s)$ où $p \in k[x]$ est un polynôme irréductible unitaire. On sait alors que, par le choix d'une base convenable, f_2 peut être mis sous forme normale de Jordan [4]. Plus explicitement, si d est le degré du polynôme p, la matrice de la multiplication par x dans $k[x]/(p^s)$ relativement à la base

$$\{1; x; x^2; \ldots; x^{d-1}; p(x); x\, p(x); x^2\, p(x); \ldots; x^{d-1}; p(x); \ldots; p^{s-1}(x);$$
$$x\, p^{s-1}(x); \ldots; x^{d-1} p^{s-1}(x)\}$$

est la forme normale de Jordan de f_2, que l'on notera J_{p^s}.

De plus, on a les résultats suivants:

1) La représentation $E \overset{1}{\underset{J_{p^s}}{\rightrightarrows}} E$ est indécomposable.

2) Soient A_1 et A_2 les représentations $E \overset{1}{\underset{J_{p^s}}{\rightrightarrows}} E$ et $E \overset{1}{\underset{J_{p^r}}{\rightrightarrows}} E$ respectivement.

Alors: $A_1 \cong A_2 \Leftrightarrow p = q$ et $s = r$.

Ces deux assertions découlent directement du fait que J_{p^s} est la matrice de la multiplication par x d'un $k[x]$-module indécomposable et univoquement déterminé par p et s (pour les modules sur un anneau principal, voir [5]).

Remarque. Les représentations du type $E \overset{f_1}{\underset{1}{\rightrightarrows}} E$ pour f_1 non inversible sont de la forme $E \overset{J_{x^n}}{\underset{1}{\rightrightarrows}} E$.

On notera $\overline{A_n^x}$ une telle représentation et A_n^p la représentation $E \overset{1}{\underset{J_{p^s}}{\rightrightarrows}} E$, où $n = \dim E = s \deg(p)$.

Conclusion

Nous avons obtenu une liste complète des représentations du type $E \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} E$. Ce sont tous les A_n^p, $n = \dim E$, $p \in k[x]$, un polynôme irréductible, unitaire, dont le degré divise n, auxquels il faut ajouter $\overline{A_n^x}$.

Avant de passer aux cas suivants, il est intéressant de remarquer que toutes les représentations examinées dans ce paragraphe sont auto-duales (isomorphes à leur duale):

Soit $E = k[x]/(p^s)$ et $J_{p^s}: E \to E$.

Chercher un isomorphisme φ, de E dans son dual, tel que $\varphi J_{p^s} = J^*_{p^s}\varphi$, revient à chercher une forme bilinéaire non dégénérée, $b: E \times E \to k$, telle que:

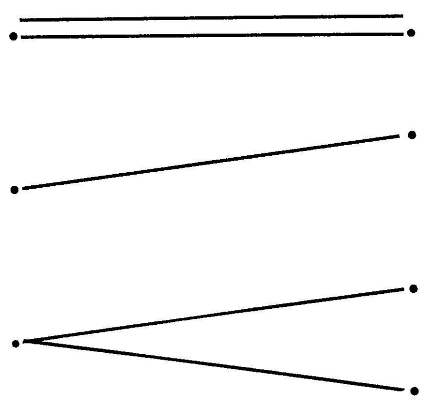
$$b(x \cdot q; q') = b(q; x \cdot q') \quad \text{pour tous} \quad q \in E \quad \text{et} \quad q' \in E.$$

Si n est le degré de p^s le produit $q \cdot q'$ s'écrit $a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ dans E, et la forme qui fait correspondre au couple $(q; q')$ le coefficient $a_{n-1} \in k$ du polynôme produit a les propriétés voulues.

3.2. Deuxième cas: $l = 1$

Pour simplifier l'écriture, on aura recours, dans ce paragraphe, à des graphes de certaines représentations. Chacun des espaces E et F y est désigné par une colonne de points, à gauche pour E, à droite pour F; l'ensemble des points d'une colonne symbolisant une base de l'espace. Les applications linéaires f_1 et f_2 sont représentées par l'ensemble des traits reliant les points de gauche à ceux de droite. Les traits représentant f_1 « montent » ou « sont horizontaux » ceux qui représentent f_2 « sont horizontaux » ou « descendent ».

Exemple.



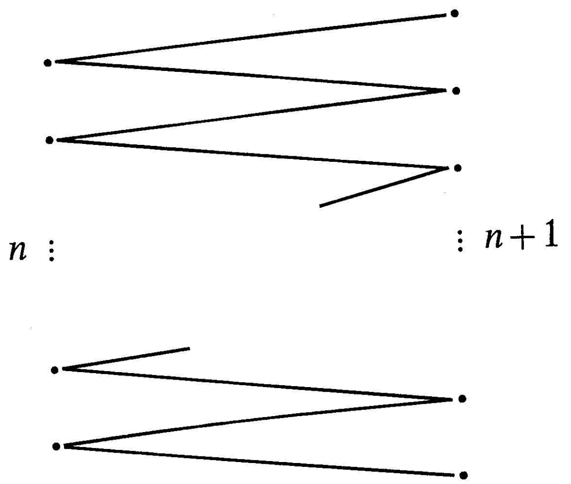
Cette représentation a les caractéristiques suivantes:

$$\dim E = 3, \quad \dim F = 4, \quad \dim \operatorname{Ker} f_1 = 0, \quad \dim \operatorname{Ker} f_2 = 1,$$
$$\dim V = \dim W = 1.$$

On voit immédiatement qu'elle est somme directe de 3 sous-représentations.

Remarque. En général, une représentation n'admet pas un graphe de ce type, mais les cas particuliers qui vont nous intéresser s'y prêtent très bien.

Notation. On notera B_n la représentation donnée par le graphe:



Remarques.

1) Les matrices de f_1 et f_2 dans les mêmes bases que ci-dessus, sont, respectivement:

$$\begin{array}{cc} n+1 & \begin{pmatrix} & 1 & \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \\ & n \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ & 1 & \end{pmatrix} & n+1 \\ n & \end{array}$$

2) B_n est indécomposable: pour le voir, il suffit de remarquer que la somme des images par f_1 et f_2 d'un sous-espace de E de dimension $i(1 \leqslant i \leqslant n)$ est toujours un sous-espace de F de dimension $\geqslant i+1$.

Soit A une représentation indécomposable donnée par

$$E = V \oplus L_1 \oplus L_2 \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} W \oplus f_2(L_1) \oplus f_1(L_2) = F\,,$$

avec $\dim E = n$, $\dim F = n+1$, $\dim V = n-m-2$, $\dim W = n-m-1$, $\dim L_1 = n_1+1$, $\dim L_2 = n_2+1$.

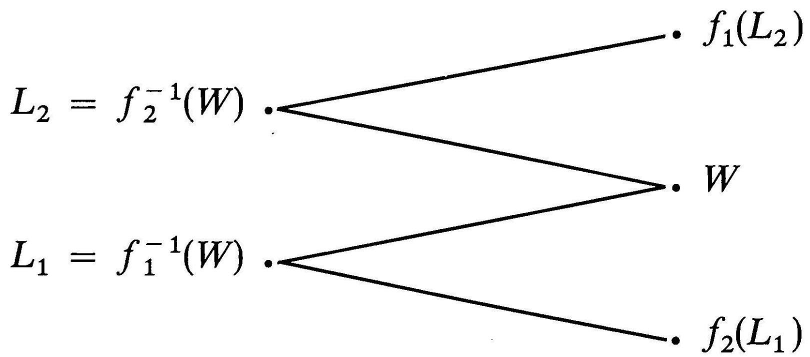
Proposition. $A \cong B_n$.

Preuve. Par récurrence sur n.

$n = 1$: c'est trivial.

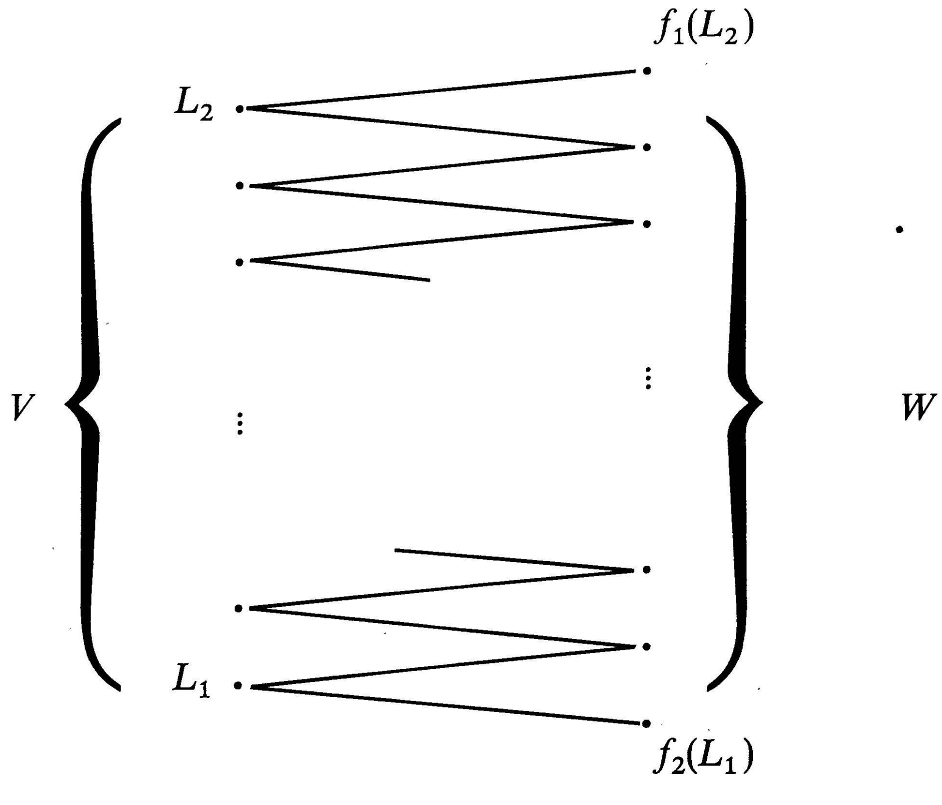
$n = 2$: puisque $\dim V = n-m-2$, on a nécessairement $m = 0$ et $V = 0$. On en déduit encore $\dim W = 1$.

Le graphe de cette représentation s'obtient naturellement en partant d'une base de W:



$n > 2$. On regarde $V \underset{\operatorname{res} f_2}{\overset{\operatorname{res} f_1}{\rightrightarrows}} W$. Par le lemme du § 2, cette sous-représentation est indécomposable.

Soit $t = \dim V = n-m-2$, alors $\dim W = t+1$, et par récurrence, la sous-représentation $V \underset{\operatorname{res} f_2}{\overset{\operatorname{res} f_1}{\rightrightarrows}} W$ est isomorphe à B_t. En particulier, $\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f_2 = 0$, $t = n-2$. Le graphe de A s'obtient alors facilement de celui de B_{n-2}:



3.3. TROISIÈME CAS: $l \geqslant 2$

Soit A, la représentation donnée par

$$E = V \oplus L_1 \oplus L_2 \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F = W \oplus f_2(L_1) \oplus f_1(L_2)$$

$\dim E = n$, $\dim F = n+l$, etc. avec $l \geqslant 2$.

PROPOSITION. *A est décomposable.*

Preuve. Par récurrence sur n:

$n = 1$: c'est trivial.

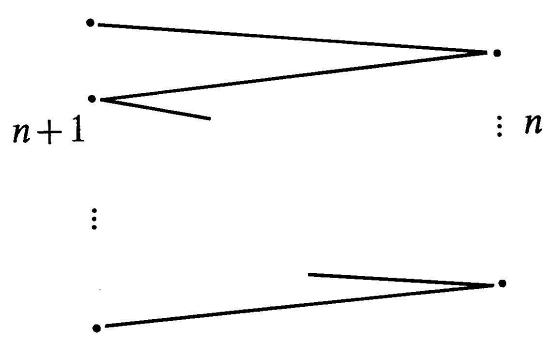
$n > 1$: on regarde la sous-représentation $V \underset{\operatorname{res} f_2}{\overset{\operatorname{res} f_1}{\rightrightarrows}} W$.

$\dim V = n-m-2l = t$, $\dim W = t+l$.

Par récurrence, cette sous-représentation est décomposable. Et alors, par le lemme du § 2, A est décomposable.

8. CONCLUSION

Notation. On notera C_n la représentation duale de B_n. C_n admet le graphe suivant:



On a démontré le

THÉORÈME. *Soit $n \in N$, un entier positif. Les représentations indécomposables, $E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$, où* $\dim E = n$, *sont les suivantes:*

1) *Tous les* A_n^p *(où* $p \in k[x]$ *est un polynôme irréductible, unitaire, dont le degré divise* n*), et* $\overline{A_n^x}$. *Pour ces représentations,* F *est de dimension* n.

2) B_n, *où* F *est de dimension* $n+1$.

3) C_n, *où* F *est de dimension* $n-1$.

RÉFÉRENCES

[1] Dieudonné, J. Sur la réduction canonique des couples de matrices. *Bulletin de la Société Mathématique de France, Vol. 74* (1946), 130-146.

[2] Cibils, C., F. Larrion et L. Salmeron. *Méthodes diagrammatiques en représentation d'algèbres de dimension finie.* Publication interne de la section de mathématiques de l'Université de Genève.

[3] Curtis, C. W. and I. Reiner. *Methods of representation theory, Vol. 1.* John Wiley & Sons, New York (1981).

[4] Curtis, C. W. *Linear Algebra. An introductory Approach.* Springer-Verlag, New York (1984).

[5] Bourbaki, N. *Algèbre, chapitre VII.*

(Reçu le 26 février 1985)

Pierre-François Burgermeister

Section de Mathématiques
Université de Genève
C.P. 2400
CH-1211 Genève 24