Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE POLARE ZERLEGUNG EINER REGULÄREN MATRIX UND DIE GEOMETRIE DER ORTHOGONALEN GRUPPE

Autor: Rummler, Hansklaus

Kapitel: §2. Die Abstandsfunktion $f_A(U): = \| A-U \|^2$

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55087

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Im Gegensatz zu der durch das Gram-Schmidt-Verfahren konstruierten hängt sie nicht von der Ordnung der Basis A ab; genauer gilt:

SATZ 2. *A und U seien wie in Satz 1, P eine Permutationsmatrix. Dann ist $\tilde{U} = UP$ die beste orthogonale Approximation von $\tilde{A} = AP$.*

Beweis. $\| \tilde{A} - \tilde{U} \| = \| AP - UP \| = \| A - U \|$, da P ja als Permutationsmatrix orthogonal ist. Gäbe es ein $\tilde{\tilde{U}} \in O(n)$ mit $\| \tilde{A} - \tilde{\tilde{U}} \| < \| A - U \|$, so wäre $\tilde{\tilde{U}}P^*$ eine bessere Approximation von A als U.

Ebenso einfach sind die Beweise der folgenden Eigenschaften dieser besten orthogonalen Approximation:

SATZ 3.

(1) *Die beste orthogonale Approximation einer positiv definiten symmetrischen Matrix ist die Einheitsmatrix.*

(2) *Ist U die beste orthogonale Approximation von A, so ist U^* diejenige von A^*.*

§ 2. DIE ABSTANDSFUNKTION $f_A(U) := \| A - U \|^2$

Sei $A \in GL(n, \mathbf{R})$ fest. Um das Minimum der Abstandsfunktion $f_A : O(n) \to \mathbf{R}$, $f_A(U) := \| A - U \|^2$ zu bestimmen, haben wir oben alle kritischen Punkte dieser Funktion bestimmt: Es sind genau diejenigen Matrizen $U \in O(n)$, für die $A = US$ ist mit symmetrischem S, so dass $S^2 = A^*A$ ist. Diese Gleichung hat genau dann endlich viele — und zwar 2^n — symmetrische Lösungen S, wenn A^*A n verschiedene Eigenwerte $0 < \lambda_1^2 < \ldots < \lambda_n^2$ hat: Es sind die Matrizen

$$S = C \begin{pmatrix} \pm\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm\lambda_m \end{pmatrix} C^*,$$

wenn $A^*A = C \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} C^*$ ist, wobei die Spalten der orthogonalen Matrix C die entsprechenden Eigenvektoren von A^*A sind. Zur Vereinfachung verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$$[\lambda]: = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n,$$

$$[\varepsilon]: = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \ldots, n,$$

$S = S_\varepsilon = C[\varepsilon]\,[\lambda]C^*$ und $U = U_\varepsilon = AS^{-1}$. Dann gilt:

SATZ 4. *Hat A^*A n verschiedene Eigenwerte, so ist f_A eine Morse-Funktion auf $O(n)$, und zwar hat der kritische Punkt U_ε den Index $(i_1-1) + \ldots + (i_k-1)$, wenn $\varepsilon_{i_1} = \ldots = \varepsilon_{i_k} = -1$ ist und die restlichen $\varepsilon_i = +1$.*

Beweis. Zur Untersuchung der Funktion f_A dürfen wir wegen Eigenschaft (1) des Skalarproduktes auf $\mathbf{R}^{n\times n}$ und wegen Satz 1 o.B.d.A. annehmen, dass $A = S$ positiv definit symmetrisch ist und ausserdem bereits in Diagonalform vorliegt, also $A = [\lambda]$ mit den oben eingeführten Bezeichnungen. Die kritischen Punkte von f_A sind dann gerade die Matrizen $U_\varepsilon = [\varepsilon]$, wobei f_A in $\mathbf{1}$ das Minimum annimmt. Ferner ist $S_\varepsilon = [\varepsilon]\,[\lambda]$.

Um f_A in der Nähe des kritischen Punktes U_ε zu untersuchen, beschränken wir die Funktion auf die Kurven $(U_\varepsilon \exp(tB))_{t\in\mathbf{R}}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times n}_{\text{asym}}$. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\| A - U_\varepsilon \exp(tB) \|^2 = \| A - [\varepsilon] \|^2 - t^2 \operatorname{tr}(S_\varepsilon B^2) + o(t^2),$$

so dass wir also die quadratische Form $Q: R^{n\times n}_{\text{asym}} \to \mathbf{R}$,

$$Q(B) = -\operatorname{tr}(S_\varepsilon B^2) = \operatorname{tr}(B^* S_\varepsilon B)$$

bzw. die zugehörige symmetrische Bilinearform untersuchen müssen. Dazu führen wir in $\mathbf{R}^{n\times n}_{\text{asym}}$ eine geeignete Basis ein:

$$B_{ij}: = E_{ij} - E_{ji}, 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$

wobei E_{ij} diejenige Matrix ist, die genau eine Eins in der i-ten Zeile an der j-ten Stelle hat und sonst lauter Nullen. Dann ist $\langle B_{ij}, B_{kl}\rangle = 2\delta_{ik}\delta_{jl}$, d.h. $(B_{ij})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ ist eine Orthogonalbasis von $\mathbf{R}^{n\times n}_{\text{asym}}$. Diese Basis diagonalisiert die Form Q:

$$\begin{aligned} Q(B_{ij}, B_{kl}) &= -\operatorname{tr}(S_\varepsilon B_{ij} B_{kl}) = -\operatorname{tr}([\varepsilon]\,[\lambda] B_{ij} B_{kl}) \\ &= \delta_{ik}\delta_{jl}(\varepsilon_i\lambda_i + \varepsilon_j\lambda_j) - \delta_{il}\delta_{jk}(\varepsilon_i\lambda_i + \varepsilon_j\lambda_j) \\ &= \delta_{ik}\delta_{jl}(\varepsilon_i\lambda_i + \varepsilon_j\lambda_j)\,, \end{aligned}$$

da wegen $i < j$ und $k < l$ stets $\delta_{il}\delta_{jk} = 0$ ist.

Insbesondere ist also $Q(B_{ij}, B_{kl}) = 0$ für $(i, j) \neq (k, l)$, und $Q(B_{ij}, B_{ij}) = \varepsilon_i\lambda_i + \varepsilon_j\lambda_j \neq 0$ wegen unserer Voraussetzung $\lambda_i \neq \lambda_j$. Dabei ist $Q(B_{ij}, B_{ij}) < 0$ genau dann, wenn $\varepsilon_j = -1$ ist, da wir ja die Werte λ_i so numeriert haben, dass $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ ist. Daraus ergibt sich sofort die angegebene Formel für den Index.

Als nächstes wollen wir untersuchen, welche Indizes bei den kritischen Punkten der Funktion f_A auftreten. Wir nehmen dazu natürlich wieder an, dass A^*A n verschiedene Eigenwerte hat und beschränken uns ausserdem auf den Fall $\det A > 0$ und die Untersuchung von $f_A|_{SO(n)}$. Dort hat f_A dann die 2^{n-1} kritischen Punkte U_ε für $\varepsilon = (\pm 1, \ldots, \pm 1)$ mit $\varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_n = +1$. Zur Kennzeichnung dieser Punkte verwenden wir die Potenzmenge $P\{1, \ldots, n-1\}$, indem wir für $\alpha \subset \{1, \ldots, n-1\}$ $U_\alpha := U_{\varepsilon(\alpha)}$ setzen, wobei $\varepsilon(\alpha) := (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ sei

$$\text{mit } \varepsilon_1 := (-1)^{\operatorname{card}(\alpha)}$$

$$\text{und } \varepsilon_i := \begin{cases} -1\,, & \text{falls } i-1 \in \alpha \\ +1\,, & \text{falls } i-1 \notin \alpha \end{cases} \qquad \text{für } i = 2, \ldots, n\,.$$

Bezeichnet $\nu(\alpha)$ den Index von f_A im kritischen Punkt U_α, so ist nach Satz 4 gerade $\nu(\alpha) = \sum_{i \in \alpha} i$. Insbesondere treten also alle Werte von $0 = \nu(\emptyset)$ bis $\dfrac{n(n-1)}{2} = \nu(\{1, \ldots, n-1\})$ auf, und zwar mit der Häufigkeit $\mu(\nu)$, die durch die erzeugende Funktion

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu(\nu) x^\nu = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + x^i)$$

beschrieben wird (vgl. [4]). $P(x)$ ist aber auch das Poincaré-Polynom von $SO(n)$ über $\mathbf{Z}/2$ (vgl. [2]). Damit haben wir das folgende Ergebnis:

SATZ 5. *Hat $A \in GL(n, \mathbf{R})$ positive Determinante und hat A^*A n verschiedene Eigenwerte, so ist die Morse-Funktion $f_A : SO(n) \to \mathbf{R}$ perfekt.* (Vgl. [1].)

Insbesondere gibt es also auf $SO(n)$ keine Morse-Funktion mit weniger kritischen Punkten.