

# VI) Annexe

Objektyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$5n - 18 \binom{n}{2} + 14 \binom{n}{3} + 8t - 8d(n-5) + \delta(n-8).$$

Si de plus  $V$  contient un nombre fini de droites, la « contribution » d'une telle droite de self-intersection  $l \in \mathbf{Z}$  à ce nombre est  $-\binom{4+l}{3}$ .

*Remarque.* On peut par exemple vérifier que la surface  $S(2, 2, 2, 2, 3)$  de  $\mathbf{P}^7$  possède 512 trisécantes, ce que donne un calcul direct dans la grassmannienne  $G(1, 7)$ .

## VI) ANNEXE

Nous avons regroupé dans cette annexe tous les calculs auxiliaires qui auraient alourdi le cours du texte. Il s'agira la plupart du temps de calculs en coordonnées locales.

### 1°) $\text{Hilb}_c^k Q$

Ce paragraphe sert à étudier  $\text{Hilb}_c^k S$  lorsque  $S \subset \mathbf{P}^4$  est une surface dont les singularités sont *ordinaires*, i.e. localement réunion de deux branches lisses transverses. (Voir I.2.a.)

Soit  $Q$  dans  $\mathbf{C}^4$  la réunion de deux plans  $P_1$  et  $P_2$  se coupant en l'origine.

LEMME 9. a) *Tout  $k$ -uplet curviligne  $\xi_0$  de support  $\{0\}$  contenu dans  $Q$  est limite dans  $(\text{Hilb}_c^k Q)_{\text{red}}$  de  $k$ -uplets formés de points distincts. En particulier  $\text{Hilb}_c^k Q$  est génériquement réduit car  $\text{Hilb}_\neq^k Q$  est dense (et réduit).*

b)  $\text{Hilb}_c^k Q$  est en fait réduit.

*Preuve.* Soit  $(x, y, z, u)$  un système de coordonnées pour lequel  $P_1$  est donné par  $x = y = 0$  et  $P_2$  par  $z = u = 0$ . De sorte que l'idéal de  $Q$  est

$$J = (x, y) \cap (z, u) = (xz, yz, xu, yu).$$

*Montrons a).* Soit  $\xi_0$  dans  $Q$  un  $k$ -uplet curviligne avec  $\text{Supp } \xi_0 = \{0\}$ . Mais  $\xi_0$  est contenu dans une courbe non-singulière  $\Gamma$ . Celle-ci est « transverse » soit à  $P_1$  soit à  $P_2$ ; supposons  $\Gamma$  transverse à  $P_1$ ; quitte à faire une transformation linéaire sur  $x$  et  $y$ ,  $\Gamma$  peut être paramétrée par

$$y = \alpha(x), \quad z = \beta(x), \quad u = \gamma(x),$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont dans l'idéal maximal de  $\mathbf{C}[[x]]$ . L'idéal de  $\xi_0$  dans  $\mathbf{C}[[x, y, z, u]]$  est donc

$$I_0 = (x^k, y - \alpha(x), z - \beta(x), u - \gamma(x)).$$

Comme on a l'inclusion  $\xi_0 \subset Q$ , soit encore  $I_0 \supset J$ , il vient  $x\beta(x)$  et  $x\gamma(x)$  multiples de  $x^k$ . En supprimant par ailleurs les termes de degré supérieur à  $k$ , l'idéal se réécrit :

$$I_0 = (x^k, y - A(x), z - \beta_0 x^{k-1}, u - \gamma_0 x^{k-1})$$

où  $A$  est un polynôme de degré  $\leq k - 1$ , nul en 0.

Considérons pour  $t \neq 0$  l'idéal de  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^4}$  défini par

$$I_t = (x(x^{k-1} - t^{k-1}), y - A(x), z - \beta_0(x^{k-1} - t^{k-1}), u - \gamma_0(x^{k-1} - t^{k-1})).$$

C'est l'idéal de la réunion du point simple de coordonnées  $(0, 0, -\beta_0 t^{k-1}, -\gamma_0 t^{k-1})$  dans  $P_1$  et de  $k - 1$  points simples distincts (et distincts du précédent) dans  $P_2$  car  $z = u = 0$  pour ces points-là.

Clairement  $I_t \rightarrow I_0$  si  $t \rightarrow 0$ , d'où l'assertion a).

Montrons b). On se ramène comme toujours à  $\text{Supp } \xi_0 = \{0\}$ . Une carte de  $\text{Hilb}^k \mathbb{C}^4$  en  $I_0$  est donnée par

$$(a_1, \dots, a_k, a'_1, \dots, a'_k, b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_k)$$

correspondant à l'idéal

$$I = (x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k, y - A(x) + a'_1 x^{k-1} + \dots + a'_k, z - \beta_0 x^{k-1} + b_1 x^{k-1} + \dots + b_k, u - \gamma_0 x^{k-1} + c_1 x^{k-1} + \dots + c_k)$$

voisin de

$$I_0 = (x^k, y - A(x), z - \beta_0 x^{k-1}, u - \gamma_0 x^{k-1}).$$

Comment s'exprime  $\text{Hilb}_c^k Q$  dans cette carte? D'après [8], on doit exprimer l'inclusion  $I \supset J$ , où  $J$  est l'idéal de  $Q$ , ce qui revient à :

$$\begin{cases} xz \in I \Leftrightarrow (b_1 - \beta_0)x^k + b_2 x^{k-1} + \dots + b_k x \in I \\ xu \in I \Leftrightarrow (c_1 - \gamma_0)x^k + c_2 x^{k-1} + \dots + c_k x \in I \\ yz \in I \Leftrightarrow a'_k z \in I \Leftrightarrow a'_k(b_1 - \beta_0)x^{k-1} + a'_k b_2 x^{k-2} + \dots + a'_k b_k \in I \\ yu \in I \Leftrightarrow a'_k u \in I \Leftrightarrow a'_k(c_1 - \gamma_0)x^{k-1} + a'_k c_2 x^{k-2} + \dots + a'_k c_k \in I. \end{cases}$$

Ceci donne les relations

$$\begin{cases} b_2 = (b_1 - \beta_0)a_1 \\ b_3 = (b_1 - \beta_0)a_2 \\ \dots \\ b_k = (b_1 - \beta_0)a_{k-1} \\ 0 = (b_1 - \beta_0)a_k \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 = (c_1 - \gamma_0)a_1 \\ c_3 = (c_1 - \gamma_0)a_2 \\ \dots \\ c_k = (c_1 - \gamma_0)a_{k-1} \\ 0 = (c_1 - \gamma_0)a_k \end{cases}$$

ainsi que

$$\begin{cases} a'_k(b_1 - \beta_0) = a'_k b_2 = \dots = a'_k b_k = 0 \\ a'(c_1 - \gamma_0) = a'_k c_2 = \dots = a'_k c_k = 0 \end{cases} .$$

En remplaçant  $b_2, b_3, \dots, b_k$  et  $c_2, c_3, \dots, c_k$  par leurs valeurs (ce qui correspond à considérer un graphe), il ne reste que l'idéal

$$(a_k(b_1 - \beta_0), a'_k(b_1 - \beta_0), a_k(c_1 - \gamma_0), a'_k(c_1 - \gamma_0)).$$

Cet idéal de  $\mathbb{C}[a_k, a'_k, c_1, b_1]$  est réduit, que  $\beta_0$  et  $\gamma_0$  soient nuls ou non. Donc  $\text{Hilb}_c^k Q$  est réduit.

2°)  $\text{Hilb}_C^k \Theta_0$  et  $\text{Hilb}_C^k \Pi_0$

Ce paragraphe est utile pour la proposition 2 (voir I.2.c.)

Nous définissons deux schémas relatifs  $\Theta/C$  et  $\Pi/C$  comme sous-schémas relatifs de  $\mathbf{C}^3 \times \mathbf{C}$  (rapporté aux coordonnées  $(x, y, z, t)$ ) par les idéaux

$$I(\Theta) = (xyz - t) \quad \text{et} \quad I(\Pi) = (y^2 - x^2z - t).$$

Les schémas  $\Theta/C^*$  et  $\Pi/C^*$  sont lisses tandis que les fibres  $\Theta_0$  et  $\Pi_0$  sont respectivement la réunion des trois plans de coordonnées de  $\mathbf{C}^3$  ainsi que la surface appelée « parapluie de Whitney ».

LEMME 10. a)  $\text{Hilb}_\neq^k \Theta_0$  est dense dans  $\text{Hilb}_C^k \Theta_0$ . En particulier  $\text{Hilb}_C^k \Theta_0$  est génériquement réduit.

b) Tout  $k$ -uplet curviligne contenu dans  $\Theta_0$  est limite de  $k$ -uplets curvilignes contenus dans  $\Theta_t$  avec  $t \neq 0$ .

*Preuve.* Soit  $\xi_0$  un  $k$ -uplet curviligne dans  $\Theta_0$ . On se ramène comme toujours au cas où  $\text{Supp } \xi_0$  est un point.

Regardons le cas où  $\text{Supp } \xi_0 = \{0\}$ . Comme  $\xi_0$  est par hypothèse situé sur une courbe non-singulière  $\Gamma$ , quitte à faire une permutation entre  $x, y$  et  $z$ , une paramétration en 0 de  $\Gamma$  est

$$y = \alpha(x) \quad z = \beta(x)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont dans l'idéal maximal de  $\mathbf{C}[[x]]$ . L'idéal  $I_0$  de  $\xi_0$  dans  $\mathbf{C}[[x, y, z]]$  est donc  $(x^k, y - \alpha(x), z - \beta(x))$ . On peut encore l'écrire

$$I_0 = (x^k, y - A(x), z - B(x))$$

où  $A$  et  $B$  sont des polynômes des degrés  $\leq k - 1$ , en éliminant les multiples de  $x^k$ . Notons  $a$  (resp.  $b$ ) la valuation en 0 de  $A$  (resp.  $B$ ). On a bien sûr  $a \leq k - 1$  et  $b \leq k - 1$ .

Comme on doit avoir l'inclusion  $I_0 \supset I(\Theta_0) = (xyz)$ , puisque  $\xi_0 \subset \Theta_0$ , cela entraîne  $xA(x)B(x) \in I_0$ , soit  $1 + a + b \geq k$  (ce qui est toujours vérifié si  $k = 3$ ). Soit  $b_1$  l'entier positif tel que  $1 + a + b_1 = k$ .

*Montrons a).* Soit  $A(x) = x^a A_1(x)$ ,  $B(x) = x^{b_1} B_1(x)$  où  $A_1$  et  $B_1$  sont deux polynômes. Pour  $s \neq 0$  dans  $\mathbf{C}$ , notons  $I_s$  l'idéal de  $\mathbf{C}[[x, y, z]]$  donné par :

$$I_s = (x(x^a - (2s)^a)(x^{b_1} - s^{b_1}), y - (x^a - (2s)^a)A_1(x), z - (x^{b_1} - s^{b_1})B_1(x)).$$

C'est l'idéal de la réunion de  $k$  points simples situés chacun sur au moins l'un des trois plans de coordonnées de  $\mathbf{C}^3$ .

De plus,  $I_s \rightarrow I_0$  dans  $\text{Hilb}^k \mathbf{C}^3$  si  $s \rightarrow 0$  dans  $\mathbf{C}$ . D'où l'assertion a), car les cas où  $\text{Supp } \xi_0$  est situé sur l'un des axes de coordonnées ou même à l'intérieur d'un des plans de coordonnées sont beaucoup plus simples; on ne les traitera pas.

*Montrons b).* Il est facile de voir qu'un point simple quelconque de  $\Theta_0$  est limite d'un point simple de  $\Theta_t$  avec  $t \neq 0$ . Ceci prouve l'inclusion

$$\text{Hilb}_\neq^k \Theta_0 \subset \text{Hilb}_\neq^k \Theta/C^*,$$

la barre désignant l'adhérence dans  $\text{Hilb}_C^k \mathbf{C}^3$ . A fortiori, on a  $\overline{\text{Hilb}_\neq^k \Theta_0}$

$\subset \overline{\text{Hilb}_{\neq}^k \Theta / \mathbb{C}^*}$ . Mais d'après a), on a  $\text{Hilb}_c^k \Theta_0$  contenu dans  $\overline{\text{Hilb}_{\neq}^k \Theta_0}$ ; il en résulte donc l'inclusion

$$\text{Hilb}_c^k \Theta_0 \subset \overline{\text{Hilb}_{\neq}^k \Theta / \mathbb{C}^*}$$

ce qu'on cherchait à prouver. Le lemme 10 est donc démontré.

Montrons maintenant le

LEMME 11. a)  $\text{Hilb}_{\neq}^k \Pi_0$  est dense dans  $\text{Hilb}_c^k \Pi_0$ . En particulier  $\text{Hilb}_c^k \Pi_0$  est génériquement réduit.

b) Tout  $k$ -uplet curviligne dans  $\Pi_0$  est limite de  $k$ -uplets curvilignes dans  $\Pi_t$  avec  $t \neq 0$ .

*Preuve.*

Montrons a). L'assertion est claire pour  $k = 1$  et facile pour  $k = 2$ . Soit donc  $k \geq 3$  et montrons par récurrence sur  $k$  que  $\text{Hilb}_{\neq}^k \Pi_0$  est dense dans  $\text{Hilb}_c^k \Pi_0$ .

Soit  $\xi_0$  un  $k$ -uplet curviligne situé dans  $\Pi_0$ ; on se ramène comme d'habitude à  $\text{Supp } \xi_0$  formé d'un seul point. Comme dans le lemme 10, seul le cas  $\text{Supp } \xi_0 = \{0\}$  est délicat et on s'y place donc.

i) Puisque  $\xi_0$  est situé sur une courbe non-singulière  $\Gamma$ , supposons-la dans un premier temps transverse au plan  $Oxy$ . L'idéal  $I_0$  de  $\xi_0$  est alors

$$I_0 = (z^k, y - A(z), x - B(z))$$

où  $A$  et  $B$  sont des polynômes de degré  $\leq k - 1$ , nuls en 0, comme on l'a vu de manière analogue dans le lemme 10. Puisque  $I_0 \supset I(\Pi_0)$  vu que  $\xi_0 \subset \Pi_0$ , et comme  $I(\Pi_0) = (y^2 - x^2z)$ , on a nécessairement  $A^2(z) - B^2(z) \cdot z \in I_0$ . Ceci entraîne

$$A^2(z) - B^2(z) \cdot z \text{ multiple de } z^k$$

et par suite  $\text{val}(A) \geq 2$  car  $k \geq 3$ . On écrit donc

$$I_0 = (z^k, y - z^2 A_1(z), x - z B_1(z))$$

où  $A_1$  et  $B_1$  sont deux polynômes vérifiant:

$$(*) \quad z^4 A_1^2(z) - z^2 B_1^2(z) \cdot z \text{ multiple de } z^k.$$

Posons pour  $s \neq 0$ :

$$I_s = (z^{k-2}(z-s)^2, y - z(z-s)A_1(z), x - (z-s)B_1(z)).$$

On a bien sûr  $I_s \supset I(\Pi_0)$  car vu (\*), le polynôme

$$z^2(z-s)^2 A_1^2(z) - (z-s)^2 B_1^2(z) \cdot z \text{ est multiple de } z^{k-2}(z-s)^2.$$

L'idéal  $I_s$  correspond à un  $k$ -uplet dans  $\Pi_0$  formé d'un doublet sur l'axe des  $z$  et d'un  $(k-2)$ -uplet disjoint, de support le point de coordonnées  $(-sB_1(0), 0, 0)$ . De plus,  $I_s \rightarrow I_0$  lorsque  $s \rightarrow 0$ .

Mais chacun de ce doublet et de ce  $(k-2)$ -uplet est lui-même limite respectivement de 2 et  $k-2$  points simples dans  $\Pi_0$ , par l'hypothèse de récurrence. Ainsi  $\xi_0$  est limite de  $k$  points simples comme on le voulait.

ii) Si maintenant  $\xi_0$  est situé sur une courbe non-singulière  $\Gamma$  tangente au plan  $Oxy$ , cette courbe est nécessairement tangente à l'axe des  $x$  (sinon comme  $\xi_0$  est dans  $\Gamma \cap \Pi_0$ , on aurait  $k = \text{long } \xi_0 \leq 2$ ). On peut donc prendre comme idéal de  $\xi_0$ :

$$I_0 = (x^k, y - x^2 A_1(x), z - x^2 B_1(x))$$

où  $A_1$  et  $B_1$  sont des polynômes. Comme  $I_0 \supset I(\Pi_0) = (y^2 - x^2 z)$ , on a donc

$$(**) \quad x^4 A_1^2 - x^4 B_1 \quad \text{multiple de } x^k.$$

Posons pour  $s \neq 0$ :

$$I_s = (x^{k-2}(x-s)^2, y - x(x-s)A_1(x), z - (x-s)^2 B_1(x)).$$

On a  $I_s \supset I(\Pi_0)$  car vu (\*\*), le polynôme  $x^2(x-s)^2(A_1^2 - B_1)$  est multiple de  $x^{k-2}(x-s)^2$ . On conclut comme en i).

*Montrons b).* Preuve analogue au b) du lemme 10.

### 3°) MODÈLES LOCAUX POUR $\Sigma_0$

Il s'agit de prouver les propositions 3 et 4 énoncées en I.3 et qui donnent la structure nilpotente du schéma  $\Sigma_0$ . On en reprend donc les notations.

Soit  $S \subset \mathbf{P}^4$  une surface à singularités ordinaires.

a) Commençons par étudier le schéma  $\Sigma_0$  au voisinage d'un point triple  $M$  de  $S'$ . Au point  $M$  correspondent trois points  $a, b, c$  de  $S$  se projetant en  $M \in S'$  sur  $H$ , par  $\omega$ . Soit  $(x, y, z, u)$  un système de coordonnées inhomogènes de  $\mathbf{P}^4$  pour lequel  $H$  est l'hyperplan  $u = 0$  et  $\omega$  le point à l'infini sur l'axe des  $u$ . On peut prendre  $M = (0, 0, 0, 0)$  et  $a = (0, 0, 0, u_1)$ ,  $b = (0, 0, 0, u_2)$ ,  $c = (0, 0, 0, u_3)$  avec les  $u_i$  distincts.

On peut également choisir les coordonnées de telle sorte que les trois plans tangents à  $S'$  en  $M$  (correspondants à  $a, b, c$ ) soient donnés par les équations

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ u = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ u = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, des équations locales de  $S$  en  $a, b$  et  $c$  sont:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(y, z) \\ u = \psi_1(y, z) \end{cases} \quad \begin{cases} y = \varphi_2(x, z) \\ u = \psi_2(x, z) \end{cases} \quad \begin{cases} z = \varphi_3(x, y) \\ u = \psi_3(x, y) \end{cases}$$

avec  $\varphi_i, \psi_i \in \mathbf{C}[[S, T]]$ , val  $\varphi_i \geq 2$  et  $\psi_i(0) = u_i$ . Comme dans [23], p. 173, l'idéal du schéma  $\Sigma$  est alors

$$(x - \varphi_1, u - \lambda \psi_1) \cap (y - \varphi_2, u - \lambda \psi_2) \cap (z - \varphi_3, u - \lambda \psi_3).$$

Effectuons le changement de coordonnées (au voisinage de 0);

$$X = x - \varphi_1, \quad Y = y - \varphi_2, \quad Z = z - \varphi_3, \quad U = u.$$

On arrive à l'idéal

$$J = (X, U - \lambda \theta_1) \cap (Y, U - \lambda \theta_2) \cap (Z, U - \lambda \theta_3)$$

où  $\theta_i \in \mathbf{C}[[X, Y, Z, U]]$ . L'idéal  $J$  est bien sûr aussi le produit de ces trois idéaux, car  $X, Y, Z$  et  $U$  sont des coordonnées.

Pour  $\lambda = 0$ , l'idéal de la fibre est

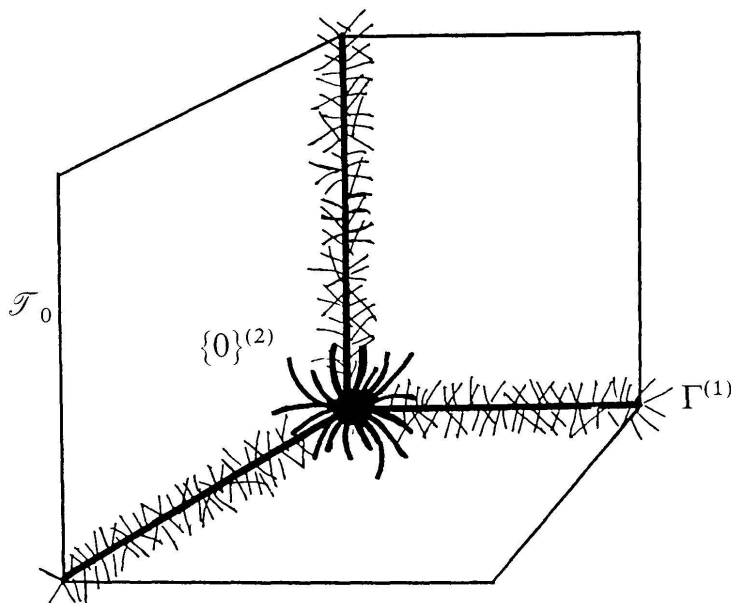
$$(X, U) \cap (Y, U) \cap (Z, U).$$

Cet idéal est celui du schéma  $\mathcal{T}_0$  étudié en [24] (p. 125). On a un isomorphisme de germes :

$$(\Sigma_0, P) \simeq (\mathcal{T}_0, 0).$$

Or on a vu (*loc. cit.* p. 126) l'égalité de schémas :

$$\mathcal{T}_0 = (\mathcal{T}_0)_{\text{red}} \cup \Gamma^{(1)} \cup \{0\}^{(2)}.$$



Les traits courts représentent des doublets et les traits longs des triplets, cela dans  $\mathbb{C}^4$ .

Ceci prouve déjà la proposition 3 au voisinage d'un point triple. De même, les assertions 4 i) et 4 iii) de la proposition 4 sont prouvées puisqu'on les a vues pour  $\mathcal{T}_0$  (*loc. cit.* prop. 5 et 7).

Enfin, prouvons l'assertion 4 ii), toujours au voisinage d'un point triple. On se ramène comme en *loc. cit.* p. 130, à considérer le triplet curviligne  $\xi_0$  d'idéal

$$I_0 = (U^3, X + U\alpha(U), Y + U\beta(U), Z + U\gamma(U))$$

où  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[[U]]$ . On le déforme alors en l'idéal

$$I_\lambda = ((U - \lambda\theta_1)(U - \lambda\theta_2)(U - \lambda\theta_3), X + (U - \lambda\theta_1)\alpha(U), \\ Y + (U - \lambda\theta_2)\beta(U), Z + (U - \lambda\theta_3)\gamma(U))$$

qui contient l'idéal  $J$ ; pour  $\lambda \neq 0$ , cet idéal correspond à la réunion de trois points simples (car les  $\theta_i(0)$  sont distincts), chacun sur une des branches de  $\Sigma_\lambda$ . De plus  $I_\lambda \rightarrow I_0$  si  $\lambda \rightarrow 0$  (la déformation étant plate). L'assertion ii) de la proposition 4 est ainsi prouvée.

b) Cette fois-ci,  $P$  est un point-pince de  $S'$ , provenant par la projection sur l'hyperplan  $H$ , du point  $a \in S$ . Nous allons étudier  $\Sigma_0$  au voisinage de  $P$ .

Soit  $(x, y, z, u)$  des coordonnées inhomogènes de  $\mathbf{P}^4$  pour lesquelles  $P = (0, 0, 0, 0)$ ,  $a = (0, 0, 0, 1)$ , le point  $\omega$  par lequel on projette étant le point à l'infini sur l'axe des  $u$ .

D'après Mather ([31], prop. 2), on peut choisir la projection  $\pi$  de  $S$  sur l'hyperplan  $H$  de sorte que  $\pi$  soit *localement stable*. Le fait que  $\pi$  soit localement stable

en  $a$  montre ([31] p. 179) que pour certains systèmes de coordonnées locales  $(s, t)$  de  $S$  en  $a$  et  $(X, Y, Z)$  de  $H$  en  $P$ , le morphisme  $\pi$  est donné par

$$(*) \quad \pi: (s, t) \mapsto (s, st, t^2).$$

Considérons alors le nouveau système de coordonnées  $(X, Y, Z, u)$  dans un voisinage de l'axe des  $u$  de  $\mathbf{P}^4$  et soit

$$(X(s, t), Y(s, t), Z(s, t), u(s, t))$$

les coordonnées d'un point de  $S$ . Par définition de la projection  $\pi$  sur  $H$ , par (\*), on a

$$X(s, t) = s, \quad Y(s, t) = st, \quad Z(s, t) = t^2.$$

Ecrivons par ailleurs  $u(s, t) = 1 + \varphi(s, t)$  avec  $\varphi$  dans l'idéal maximal de  $\mathbf{C}[[s, t]]$ .

Comme  $S$  est non singulière en  $a$ , on a nécessairement  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) \neq 0$ .

Ainsi une représentation paramétrique locale de  $S$  en  $a$  est-elle:

$$X = X, \quad Y = Xt, \quad Z = t^2, \quad u = 1 + \varphi(X, t).$$

Si l'on écrit

$$\varphi(X, t) = t\alpha(X, t) + \beta(X, t)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  (dans l'idéal maximal de  $\mathbf{C}[[X, t]]$ ) ne contiennent que des puissances paires de  $t$ , il vient aussi la représentation paramétrique de  $S$  au voisinage de  $a$ :

$$X = X, \quad Y = Xt, \quad Z = t^2, \quad u = 1 + t\alpha'(X, Z) + \beta'(X, Z)$$

où  $\alpha', \beta' \in \mathbf{C}[[X, Z]]$ . Enfin, si l'on écrit

$$\alpha'(X, Z) = \alpha_0(Z) + X\alpha''(X, Z)$$

avec  $\alpha_0(0) \neq 0$  car  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) \neq 0$ , on a également la représentation paramétrique:

$$X = X, \quad Y = Xt, \quad Z = t^2, \quad u = 1 + t\alpha_0(Z) + Y\alpha''(X, Z) + \beta'(X, Z).$$

De I.3.a, il ressort que  $\Sigma/\mathbf{C}^*$  est le schéma donné dans  $\mathbf{C}^4 \times \mathbf{C}^*$  (de coordonnées  $(X, Y, Z, u, \lambda)$  avec  $\lambda \neq 0$ ) par la représentation paramétrique, au voisinage de l'axe des  $u$ :

$$Y = Xt, \quad Z = t^2, \quad u = \lambda(1 + t\alpha_0(Z) + Y\alpha''(X, Z) + \beta'(X, Z))$$

et  $X = X, \lambda = \lambda$ .

Effectuons le nouveau changement de coordonnées

$$U = \frac{1}{\alpha_0(Z)} (u - \lambda - \lambda Y\alpha''(X, Z) - \lambda\beta'(X, Z)) \quad (\text{on a } \alpha_0(0) \neq 0)$$

et  $X = X, Y = Y, Z = Z, \lambda = \lambda$  dans  $\mathbf{C}[[X, Y, Z, u, \lambda]]$ .

Dans ce dernier système, on a  $U = \lambda t$  d'où la représentation paramétrique de  $\Sigma/\mathbf{C}^*$ :

$$X = X, \quad Y = \frac{XU}{\lambda}, \quad Z = \frac{U^2}{\lambda^2}, \quad U = U, \quad \lambda = \lambda.$$



Il est alors aisé de voir que l'adhérence dans  $\mathbf{C}^4 \times \mathbf{C}$  a pour idéal :

$$J = (Y^2 - X^2Z, XU - \lambda Y, U^2 - \lambda^2 Z, YU - \lambda XZ).$$

Ces équations sont en effet nécessaires; réciproquement, nous voyons qu'un point  $(X_0, Y_0, Z_0, U_0)$  de la fibre en 0 (donc vérifiant  $Y_0^2 - X_0Z_0 = 0$  et  $U_0 = 0$ ) est limite de points dans des fibres au-dessus de  $\lambda \neq 0$ . On remarque pour cela que

si  $X_0 \neq 0$ :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ \lambda Y_0/X_0 \end{pmatrix}$$

si  $X_0 = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_0 \\ \lambda r_0 \end{pmatrix}$$

où  $r_0$  est une racine de  $Z_0$ .

Ce qui précède montre l'isomorphisme, au-dessus de  $\mathbf{C}$ , entre les schémas relatifs  $\Sigma/\mathbf{C}$  et  $\mathcal{P}/\mathbf{C}$ , le schéma  $\mathcal{P}$  ayant été introduit en [24], p. 131. La proposition 3 et les assertions i) et ii) de la proposition 4 sont donc prouvées au voisinage d'un point-pince, puisqu'on a démontré l'analogie pour les schémas  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_0$  (*loc. cit.* prop. 9 et 10).

Il reste à montrer l'assertion iii) de la proposition 4. Soit donc  $d_0$  un doublet transverse à  $H = \{u = 0\}$ , contenu dans  $\mathcal{P}_0$ . Son idéal est

$$I_0 = (u^2, x - \alpha u, y - \beta u, z - \gamma u),$$

où  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$ . Une carte de  $\text{Hilb}^2 \mathbf{C}^4$  en  $d_0$  est alors donnée par

$$(a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)$$

correspondant à l'idéal voisin :

$$I = (u^2 + au + b, x - \alpha u + a_1 u + b_1, y - \beta u + a_2 u + b_2, z - \gamma u + a_3 u + b_3).$$

Dire que le doublet est contenu dans  $\mathcal{P}_0$  revient à affirmer l'inclusion  $I \supset J$ . Or  $u^2 \in I$  équivaut à  $a = b = 0$ . On en déduit  $b_1 = b_2 = 0$ . Réciproquement, si  $a = b = b_1 = b_2 = 0$ , on a  $J \subset I$ . Il se trouve qu'on a alors obtenu des équations du sous-schéma  $\text{Hilb}^2 \mathcal{P}_0$  dans  $\text{Hilb}^2 \mathbf{C}^4$ . (Voir [24], p. 124 et 131). Ainsi  $\text{Hilb}^2 \mathcal{P}_0$  est lisse, donc réduit.

c) Etudions maintenant  $\Sigma_0$  au voisinage de la courbe double  $\Gamma$  de  $S'$ . On se convainc facilement que  $\Sigma/\mathbf{C}$  est isomorphe au produit  $\mathbf{C} \times (\mathcal{X}/\mathbf{C})$  où  $\mathcal{X}$  est le schéma relatif introduit en [24], p. 121 et qui servait de modèle local pour l'étude des multiséchantes aux courbes. Les assertions analogues se transportent donc mutatis mutandis, le facteur  $\mathbf{C}$  supplémentaire ne jouant que peu de rôle. (Voir *loc. cit.* propositions 2, 3 et 4.)

D'après a), b) et c) qui précèdent, nous avons donc démontré complètement les propositions 3 et 4 énoncées en I.3.b.

#### 4°) LES LEMMES 7 ET 8

a) Prouvons le lemme 7 énoncé en II.2.c.

Soit  $\xi_0$  un triplet  $d_0 \cup m_0$  où  $d_0$  est un doublet de support un point de la courbe double  $\Gamma$  et  $m_0$  un point de  $S'$  situé sur Axe  $d_0$ . Si  $\text{Supp } d_0 = \{0\}$ , soit

$(x, y, z, u)$  un système de coordonnées inhomogènes centré en 0; on peut choisir l'axe des  $z$  tangent à  $\Gamma$  en 0 et  $m_0 = (1, 1, 0, 0)$  dans ce système. De sorte que l'idéal de  $d_0$  dans  $\mathbf{C}[x, y, z, u]$  est  $(x^2, y-x, z, u)$ . Une carte de  $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$  en  $\xi_0 = d_0 \cup m_0$  est alors donnée par d'une part les coefficients de l'idéal voisin

$$(x^2 + ax + b, y - x + a_1x + b_1, z + a_2x + b_2, u + a_3x + b_3)$$

pour un doublet  $d$  voisin de  $d_0$  et d'autre part par

$$(1 + \alpha, 1 + \beta, \gamma, \delta)$$

pour un point simple  $m$  voisin de  $m_0$ .

Dans cette carte,  $Al^3 \mathbf{P}^4$  s'exprime très simplement: on doit avoir  $m \in \text{Axe } d$ , soit

$$\beta - \alpha + a_1(1 + \alpha) + b_1 = \gamma + a_2(1 + \alpha) + b_2 = \delta + a_3(1 + \alpha) + b_3 = 0.$$

Par ailleurs, pour exprimer  $S_{21}$ , on doit avoir:

- la condition que l'axe  $d$  rencontre  $\Gamma$ . Un calcul élémentaire (par exemple [29], p. 252, prop. 20.b) montre que l'application linéaire *tangente* à cette condition s'obtient en demandant à l'axe  $d$  de rencontrer la *tangente* en 0 à  $\Gamma$ , soit (puisqu'ici c'est l'axe des  $z$ ):  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ;
- de plus,  $d$  doit être un point-double, soit la condition d'annulation du discriminant  $a^2 - 4b = 0$ ;
- enfin, le point  $m$  doit être sur  $S'$ ; écrivons  $\varphi(x-1, y-1, z) = 0$  (avec  $\partial_0 \varphi \neq 0$ ) une équation locale de  $S'$  en  $m_0 = (1, 1, 0)$  dans  $\mathbf{P}^3$  et soit donc

$$\varphi(x-1, y-1, z) = u = 0$$

les équations de  $S'$  dans  $\mathbf{P}^4$ . Dire que le point  $m$  est sur  $S'$  s'exprime ainsi par  $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \delta = 0$ .

On vérifie rapidement que les équations linéaires tangentes à ces 9 équations sont indépendantes et ceci prouve le lemme 7.

b) Prouvons maintenant le lemme 8 énoncé en IV.1.c.

Soit  $m$  un point générique de  $V'$  tel que la droite  $\overline{Nm}$  ne soit pas tangente à  $V'$  en  $m$  et que le plan  $T_m V'$  soit transverse à  $P$  et  $Q$ , où  $P$  et  $Q$  désignent les deux plans tangents aux deux composantes de  $V'$  en  $N$ . Après choix d'un hyperplan à l'infini de  $\mathbf{P}^5$ , soit  $(x, y, z, u, v)$  un système inhomogène centré en  $N$  tel que l'hyperplan  $\mathbf{P}^4$  contenant  $V'$  soit donné par  $\{v=0\}$  et les points

$$\left\{ \begin{array}{l} m \text{ donné par } (0, 1, 0, 1, 0) \\ T_m V' \cap P \text{ donné par } (1, 0, 0, 0, 0) \\ T_m V' \cap Q \text{ donné par } (0, 0, 1, 0, 0). \end{array} \right.$$

Un système d'équations de  $T_m V'$  est alors

$$x + y + z - 1 = y - u = v = 0.$$

Considérons le triplet  $t$  d'axe  $\overline{Nm}$ , double en  $N$ , simple en  $m$  et montrons que l'intersection  $Al^3 \mathbf{P}^5 \cap U$  est transverse en  $t$ . Le choix de  $t$  étant générique dans  $U$ , le lemme sera démontré.

Or au voisinage de  $N$ , le triplet  $t$  est formé par le doublet  $d$ , d'idéal  $(u^2, x, z, y-u, v)$ . Une carte de  $\text{Hilb}^2 \mathbf{P}^5$  en  $d$  est donc donnée par les coefficients de l'idéal voisin:

$$(*) \quad (u^2 + au + a', x + bu + b', z + cu + c', y - u + du + d', v + eu + e').$$

D'autre part, des équations locales de  $V'$  en  $m = (0, 1, 0, 1, 0)$  sont

$$\begin{cases} u = y + \varphi(x, y-1) \\ z = 1 - y - x + \psi(x, y-1) \\ v = 0 \end{cases}$$

où  $\varphi$  et  $\psi$  sont dans  $\mathbf{C}[[X, Y]]$ , de valuations  $\geq 2$ . Un point voisin de  $m$  sera repéré par

$$(**) \quad (\alpha, 1 + \beta, \gamma, 1 + \delta, \varepsilon).$$

On obtient ainsi, avec (\*) et (\*\*), une carte de  $\text{Hilb}^3 \mathbf{P}^5$  en  $t$ . Dans cette carte,  $Al^3 \mathbf{P}^5$  s'exprime par

$$\begin{cases} \alpha + b(1 + \delta) + b' = 0 & \beta - \delta + d(1 + \delta) + d' = 0 \\ \gamma + c(1 + \delta) + c' = 0 & \varepsilon + e(1 + \delta) + e' = 0 \end{cases}$$

car le troisième point doit être sur l'axe du doublet. Par ailleurs  $U$  est donné, par définition même, par les équations

$$a = a' = b' = c' = d' = e' = 0$$

qui concernent le point-doublet (il doit être de support  $\{N\}$ ) et par

$$\delta = \beta + \varphi(\alpha, \beta), \quad \gamma = -\alpha - \beta + \psi(\alpha, \beta), \quad \varepsilon = 0$$

qui concernent le point simple (il doit être sur  $V'$ ).

Les relations linéaires tangentes à ces 13 équations sont indépendantes, ce qui termine la démonstration du lemme 8.

### 5°) IDENTIFICATION

Les deux lemmes ci-après servent à trouver des relations entre les coefficients de polynômes que sont les nombres d'intersection cherchés; voir III.1.b, III.2.b, IV.2.a, etc.

**LEMME 12.** *Soit  $P$  un polynôme à 4 variables. On suppose pour toute surface à singularités ordinaires de  $\mathbf{P}^4$  d'invariants  $(n, d, t, \delta)$  que  $P(n, d, t, \delta) = 0$ . Alors  $P$  est identiquement nul.*

*Preuve.* Soit  $S$  la surface de  $\mathbf{P}^4$  réunion d'un nombre fini de surfaces  $S_i$  d'invariants  $(n_i, d_i, t_i, \delta_i)$ . Les invariants de  $S$  sont alors, comme on le vérifie facilement:

$$\begin{cases} n = \sum_i n_i \\ d = \sum_i d_i + \sum_{i < j} n_i n_j \\ t = \sum_i t_i + \sum_{i \neq j} d_i n_j + \sum_{i < j < k} n_i n_j n_k \\ \delta = \sum_i \delta_i + \sum_{i < j} n_i n_j \end{cases}$$

Regardons maintenant le cas particulier de la surface  $S$  réunion dans  $\mathbf{P}^4$  de  
—  $p$  plans,

- $q$  surfaces quadriques
  - $r$  surfaces cubiques
- } (dans certains hyperplans de  $\mathbf{P}^4$ )
- $s$  surfaces  $S(2, 2)$ , dont les invariants sont  $(4, 2, 0, 0)$ .

D'après ce qui précède, les invariants de  $S$  sont donc :

$$\begin{cases}
 n = p + 2q + 3r + 4s, \\
 d = 2s + \binom{p}{2} + 4\binom{q}{2} + 9\binom{r}{2} + 16\binom{s}{2} + 2pq + 3pr + 4ps \\
 \quad + 6qr + 8qs + 12rs, \\
 t = \binom{p}{3} + 8\binom{q}{3} + 27\binom{r}{3} + 64\binom{s}{3} + \binom{p}{2}(2q + 3r + 4s) + 4\binom{q}{2}(p + 3r + 4s) \\
 \quad + 9\binom{r}{2}(p + 2q + 4s) + 16\binom{s}{2}(p + 2q + 3r) + 6pqr + 8pqs + 12prs + 24qrs, \\
 \delta = \binom{p}{2} + 4\binom{q}{2} + 9\binom{r}{2} + 16\binom{s}{2} + 2pq + 3pr + 4ps + 6qr + 8qs + 12rs.
 \end{cases}$$

Soit  $\varphi: \mathbf{C}^4 \rightarrow \mathbf{C}^4$  l'application qui à  $(p, q, r, s)$  associe  $(n, d, t, \delta)$  définis par les quatre formules qui précèdent. Par hypothèse, pour toute surface  $S$  de  $\mathbf{P}^4$  d'invariants  $(n, d, t, \delta)$ , on a  $P(n, d, t, \delta)$  égal à 0. En particulier, pour la surface précédente; ce qui signifie que le polynôme  $P_0\varphi$  s'annule sur  $\mathbf{N}^4$ . On a donc  $P_0\varphi = 0$ . Mais comme on le vérifie aisément, la différentielle  $\partial_0\varphi$  est inversible; par suite  $P$  est nul dans un ouvert non vide de  $\mathbf{C}^4$ , donc identiquement nul.

LEMME 13. Soit  $S$  une surface de  $\mathbf{P}^4$  d'invariants  $(n, d, t, \delta)$ . Soit  $\tilde{S} = S \cup P$  la réunion de  $S$  et d'un plan transverse. Alors les invariants de  $\tilde{S}$  sont  $\tilde{n} = n + 1$ ,  $\tilde{d} = d + n$ ,  $\tilde{t} = t + d$ ,  $\tilde{\delta} = \delta + n$ .

*Preuve.* On regarde dans ce qui précède les invariants d'une réunion  $S_1 \cup S_2$  où  $S_1 = S$  et  $S_2 = P$ .

*Remarque.* Les lemmes 12 et 13 sont encore valables si on remplace les invariants  $(n, d, t, \delta)$  par  $(n, d, t, h)$  où  $h$  est le nombre de points-doubles apparents (sur un  $\mathbf{P}^2$ ) de la courbe double apparente  $\Gamma$  (sur un  $\mathbf{P}^3$ ) de la surface. En effet,  $h$  est donné par

$$2h = d(d - n + 2) - \delta - 3t$$

(voir [28], § V) et pour  $\tilde{S} = S \cup P$ , on a alors  $\tilde{h} = h + d(n - 2)$ .

## 6°) INVARIANTS DES SURFACES

Nous donnons ici les invariants des surfaces servant de cas particuliers pour établir les formules.

Pour une surface  $S$  lisse de  $\mathbf{P}^N$ , nous avons les invariants  $c_2$ ,  $K^2$  et  $HK$  où  $c_2$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique,

$K$  est le diviseur canonique,

$H$  est le diviseur hyperplan.

Par rapport à ces invariants  $d, t$  et  $\delta$  sont donnés par les formules classiques (si  $n = \text{degré } S$ ):

$$\begin{cases} 2d = n(n-4) - HK \\ 2\delta = n(n-10) + c_2 - K^2 - 5HK \\ 6t = n(n^2 - 12n + 44) + 4K^2 - 2c_2 - 3HK(n-8). \end{cases}$$

Ceci peut se voir par exemple en appliquant les formules du lieu double [22] et triple [17].

On peut également donner les formules en utilisant les invariants classiques  $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \nu_2)$ :

$$\begin{aligned} 2d &= n(n-1) - \mu_1, & 2\delta &= n(n-1) - \mu_1 - \nu_2 \\ 6t &= n(n-1)(n-2) - 3n\mu_1 + 2(2\mu_1 + 2\mu_2 + \nu_2) \end{aligned}$$

et bien sûr  $n = \mu_0, \nu = \nu_2$  (voir [34]).

Ceci permet de dresser les tableaux suivants; un symbole tel que  $S(i_1, \dots, i_k)$  désigne l'intersection complète de  $k$  hypersurfaces de degrés  $i_1, \dots, i_k$  dans  $\mathbf{P}^{k+2}$  (voir [34]). Les surfaces considérées dans  $\mathbf{P}^4$  ont  $\delta = 0$  car lisses.

surface	$n$	$d$	$t$	surface	$n$	$d$	$t$	$\delta$
$S(2, 2) \subset \mathbf{P}^4$	4	2	0	$S(2, 2, 2) \subset \mathbf{P}^5$	8	16	8	4
$S(2, 3) \subset \mathbf{P}^4$	6	6	0	$S(2, 2, 3) \subset \mathbf{P}^5$	12	42	48	12
$S(3, 3) \subset \mathbf{P}^4$	9	18	6	$S(2, 2, 2, 2) \subset \mathbf{P}^6$	16	88	208	40
$S(2, 4) \subset \mathbf{P}^4$	8	12	0	$S(2, 2, 2, 2, 2) \subset \mathbf{P}^7$	32	416	2880	256
$S(3, 4) \subset \mathbf{P}^4$	12	36	24	$S(2, 2, 2, 2, 3) \subset \mathbf{P}^7$	48	984	11376	648
Veronese $\subset \mathbf{P}^4$	4	3	1	del Pezzo $S_5 \subset \mathbf{P}^5$	5	5	1	1

7°) QUASITRANSVERSALITÉ

Le lemme suivant sert, en utilisant la théorie de Fulton-MacPherson, à construire un cycle fixé dans  $Al^3 \mathbf{P}^N$ , de codimension  $(2n+1+3N) - (2N+1+3n) = N - n$ . Voir III.2.a, IV.1.b, V.1.

LEMME 14. Soit  $\mathbf{P}^n$  un sous-espace linéaire de  $\mathbf{P}^N$ . Alors dans  $Hilb_c^3 \mathbf{P}^N$ , l'intersection de  $Al^3 \mathbf{P}^N$  et  $Hilb_c^3 \mathbf{P}^n$  est schématiquement  $Al^3 \mathbf{P}^n$ . On a le diagramme commutatif où les dimensions sont entre parenthèses :

$$\begin{array}{ccccc} (2N+1) & Al^3 \mathbf{P}^N & \hookrightarrow & Hilb_c^3 \mathbf{P}^N & (3N) \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ (2n+1) & Al^3 \mathbf{P}^n & \hookrightarrow & Hilb_c^3 \mathbf{P}^n & (3n) \end{array} .$$

*Preuve.* On va voir que  $Al^3 \mathbf{P}^N$  et  $Hilb_c^3 \mathbf{P}^n$  se coupent *quasitransversalement* dans  $Hilb_c^3 \mathbf{P}^N$ . Soit pour cela  $(x, x_2, x_3, \dots, x_N)$  un système de coordonnées inhomogènes pour lequel  $\mathbf{P}^n$  est donné par  $x_N = x_{N-1} = \dots = x_{N-n+1} = 0$  et soit  $\xi_0$  un  $k$ -uplet aligné dans  $\mathbf{P}^n$ . On peut supposer que Axe  $\xi_0$  est l'axe des  $x$ ; l'idéal  $I_0$  de  $\xi_0$  est donc

$$I_0 = (p(x), x_2, x_3 \dots x_N)$$

où  $p$  est un polynôme de degré 3. Une carte de  $Hilb_c^3 \mathbf{P}^N$  en  $\xi_0$  est donc donnée par les coefficients de l'idéal

$$I = (p(x) + ax^2 + bx + c, x_2 + a_2x^2 + b_2x + c_2, \dots, x_N + a_Nx^2 + b_Nx + c_N).$$

Dans cette carte,  $Al^3 \mathbf{P}^N$  s'exprime par

$$a_2 = a_3 = \dots a_N = 0$$

et  $Hilb_c^3 \mathbf{P}^N$  par  $a_i = b_i = c_i = 0$  avec  $N - n + 1 \leq i \leq N$ . D'où l'assertion de quasitransversalité.

*Remarque.* Le résultat est évidemment analogue pour  $Al^k \mathbf{P}^N$  si  $k > 3$ .

#### 8°) CALCUL DE MULTIPLICITÉS

a) Soit  $S$  une surface de  $\mathbf{P}^4$  avec un point-double impropre  $O$  et soit  $m_0$  un point simple quelconque de  $S$ . Supposons que la droite  $\overline{Om_0}$  coupe une droite générique fixée  $\Delta$  (on prendra  $\Delta \cap T_{m_0}S = \emptyset$ ). Si l'on regarde le triplet aligné  $d_0 \cup m_0$  d'axe  $Om_0$  où  $d_0$  est le doublet de support  $\{O\}$ , ce triplet est évidemment contenu dans  $S$ . *Quelle est sa multiplicité dans le nombre  $T(S)$  des tangentes à  $S$  recoupant  $S$  et la droite  $\Delta$ ?* (Voir III.1).

Soit pour ce calcul, un système de coordonnées inhomogènes  $(x, y, z, t)$  centré en  $O$ , avec  $m_0 = (1, 1, 1, 1)$ , les plans tangents aux deux branches de  $S$  en  $O$  étant donnés par  $x = y = 0$  et  $z = t = 0$ . L'idéal de  $d_0$  dans  $\mathbf{C}[[x, y, z, t]]$  est alors

$$(x^2, y-x, z-x, t-x).$$

Un doublet  $d$  voisin de  $d_0$  est repéré par l'idéal

$$(x^2 + ax + b, y-x + a_1x + b_1, z-x + a_2x + b_2, t-x + a_3x + b_3).$$

De même, un point  $m$  voisin de  $m_0$  est repéré par  $(1+u_0, 1+u_1, 1+u_2, 1+u_3)$ . On obtient ainsi une carte de  $Hilb_c^3 \mathbf{P}^4$  en le triplet  $d_0 \cup m_0$ .

Dans cette carte,  $Al^3 \mathbf{P}^4$  s'exprime évidemment par

$$(1) \quad u_1 - u_0 + a_1(1+u_0) + b_1 = 0$$

$$(2) \quad u_2 - u_0 + a_2(1+u_0) + b_2 = 0$$

$$(3) \quad u_3 - u_0 + a_3(1+u_0) + b_3 = 0,$$

car le point simple  $m$  doit être sur Axe  $d$ . De plus, la sous-variété  $\mathcal{D}$  de  $Al^3 \mathbf{P}^4$  s'exprime par

$$(4) \quad a^2 - 4b = 0$$

puisque  $d$  doit avoir pour support un seul point.

Par ailleurs, la condition pour l'axe de rencontrer  $\Delta$  signifie que  $m$  reste dans

le plan fixe  $P$  engendré par  $O$  et  $\Delta$ . On peut par exemple prendre  $z = x$  et  $t = y$  pour équations de ce plan. D'où les conditions supplémentaires :

$$(5) \quad u_0 = u_2$$

et

$$(6) \quad u_1 = u_3.$$

Enfin, exprimons  $\text{Hilb}^3 S$  dans cette carte.

Pour ce qui est du doublet  $d$  : on doit avoir l'inclusion d'idéaux  $I(d) \supset I(S)$ . Soit

$$x + \dots = y + \dots = 0$$

et 
$$z + \dots = t + \dots = 0$$

les équations des deux branches de  $S$  en  $0$ , les  $\dots$  signifiant des termes d'ordre au moins 2. L'idéal  $I(S)$  est dans  $\mathbb{C}[[x, y, z, t]]$  :

$$(xz + \dots, xt + \dots, yz + \dots, yt + \dots)$$

les  $\dots$  signifiant des termes d'ordre au moins 3.

Regardons par exemple la condition  $xz + \dots \in I(d)$ . On doit avoir alors puisque  $z + (a_2 - 1)x + b_2 \in I(d)$ , la relation

$$b_2x + (a_2 - 1)x^2 + \dots = f(x)(b + ax + x^2)$$

où  $f \in \mathbb{C}[[x]]$ . Si  $f = \sum_i f_i x^i$ , on obtient en identifiant :

$$\begin{cases} 0 = f_0 b \\ b_2 = f_1 b + f_0 a \\ a_2 - 1 = f_2 b + f_1 a + f_0. \end{cases}$$

Désignons l'idéal maximal de  $\mathbb{C}[[a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3]]$  par  $m$  et écrivons  $f = g + m^k$  pour  $f - g \in m^k$ . La troisième relation obtenue montre :  $1 + f_0 \in m$  et donc, par la première :

$$(7) \quad b = 0.$$

La deuxième donne ainsi :

$$(8) \quad b_2 = -a + m^2.$$

Même raisonnement avec  $xt + \dots$  ; on obtient  $b = 0$  et

$$(9) \quad b_3 = -a + m^3.$$

Regardons la condition  $yz + \dots \in I(d)$ . On a

$$yz \equiv ((a_1 - 1)x + b_1)((a_2 - 1)x + b_2) \quad \text{modulo } I(d).$$

D'où la relation

$$((a_1 - 1)x + b_1)((a_2 - 1)x + b_2) + \text{termes d'ordre} \geq 3 = g(x)(b + ax + x^2).$$

En identifiant :

$$\begin{cases} b_1 b_2 = g_0 b \\ b_1(a_2 - 1) + b_2(a_2 - 1) = g_1 b + g_0 a \\ (a_1 - 1)(a_2 - 1) = g_2 b + g_1 a + g_0. \end{cases}$$

de la troisième relation vient  $g_0 = 1 + m$ , d'où vu que  $b = 0$  et  $b_2 = -a + m^2$ , par la deuxième relation:  $-b_1 - b_2 = a + m^2$ , soit

$$(10) \quad b_1 = m^2.$$

Idem avec  $yt + \dots$

Pour ce qui est du point simple  $m$ : soit  $z = 1 + \varphi(x-1, y-1)$  et  $t = 1 + \psi(x-1, y-1)$  des équations locales de  $S$  au voisinage de  $m_0 = (1, 1, 1, 1)$ . La condition que le point  $m$  est sur  $S$  est alors simplement

$$(11) \quad u_2 = \varphi(u_0, u_1)$$

et

$$(12) \quad u_3 = \psi(u_0, u_1).$$

Les 12 équations précédentes forment alors un idéal dont il est facile de voir que la longueur est 2. En effet, comme  $b = 0$  et  $a^2 - 4b = 0$ , on obtient  $a^2 = 0$ . Par ailleurs les 11 autres équations ont des relations linéaires tangentes indépendantes. (En effet, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 1 & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} - 1 \end{vmatrix}$$

est non nul en  $m_0$  car les deux plans  $T_{m_0}S$  et  $P$  sont transverses).

La multiplicité cherchée est donc 2.

b) Soit  $S$  une surface de  $\mathbf{P}^4$ . On regarde maintenant le nombre  $T(S)$  des tangentes d'inflexion coupant un plan fixe  $\pi$ . C'est par définition (III.2) le degré du 0-cycle

$$T(S) = \deg [\mathcal{T}] \cdot \text{Axe}^* \sigma_1 \cdot [\text{Hilb}_c^3 S]$$

dans  $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$  où  $\sigma_1$  est le cycle des droites coupant un plan fixe.

Si  $S$  admet un point-double impropre  $O$  avec deux branches  $S_1$  et  $S_2$ , supposons que  $\pi$  recoupe  $T_0 S_2$  en  $P$ . Alors la droite  $OP$  coupe  $S$  en  $O$  suivant un triplet  $\theta_0$  de la forme  $\rightarrow$ . Nous voulons calculer la contribution de ce triplet dans  $T(S)$ . Mais seulement sa contribution parasite, car il n'est pas exclu que la droite  $OP$  puisse être une vraie tangente d'inflexion de la branche  $S_2$ , auquel cas  $\theta_0$  compterait légitimement comme intersection entre  $\text{Hilb}_c^3 S_2$  et  $\mathcal{T}$ . Evidemment, ce ne sera pas le cas génériquement; mais c'est cependant le cas dans le calcul effectué en III pour la surface  $\tilde{S} = S \cup P$ .

Pour éclairer cette situation, regardons plutôt les tangentes d'inflexion d'une courbe  $C$  dans  $\mathbf{P}$ . Leur nombre est défini comme le nombre d'intersection

$$T(C) = \deg [\mathcal{T}] \cdot [\text{Hilb}_c^3 C]$$



dans  $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^2$  où  $\mathcal{T}$  est la sous-variété de  $Al^3 \mathbf{P}^2$  des triplets de la forme  $\xrightarrow{3}$ . Ce nombre est comme on sait [28]  $3n(n-2)$  où  $n = \text{deg } C$ . Cependant, le cas où  $C$  est singulière est à interpréter. Examinons en effet un croisement normal  $O$  de  $C$  et soient  $C_1, C_2$  les deux branches de  $C$  en ce point. La tangente à  $C_2$  en  $O$  coupe  $C$  suivant le triplet  $\theta_0$  de la forme  $\xrightarrow{3}$  et ce triplet devra être compté avec multiplicité 3. Si  $h$  est le nombre de points-doubles de  $C$ , on aura donc le nombre correct

$$3n(n-2) - 6h$$

de tangentes d'inflexion (car il y en a deux « fausses » par point-double).

Supposons maintenant que  $O$  soit un point d'inflexion de la branche  $C_2$ . Le triplet  $\theta_0$  devra être compté deux fois dans  $T(C)$ : une fois comme « vraie » tangente d'inflexion de  $C_2$  avec multiplicité 1 et une fois comme dans ce qui précède (et avec multiplicité 3). Cela vient en effet de ce que le germe de  $\text{Hilb}_c^3 C$  en  $\theta_0$  est formé des deux composantes

$$\text{Hilb}^3 C_2 \quad \text{et} \quad \overline{\text{Hilb}^2 C_2^0 \times C_1^0}$$

où  $C_i^0$  est  $C_i - \{O\}$ , la barre désignant l'adhérence dans  $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^2$  (la dernière composante est formée des limites de triplets ayant deux points sur  $C_2$  et un point sur  $C_1$ ).

Exemple: Si  $C$  est la réunion de deux droites  $L_1$  et  $L_2$ , on a évidemment  $T(C) = 0$  (en déformant en une conique lisse) ce qu'on voit aussi en écrivant

$$0 = -3 - 3 + 3 + 3,$$

car ce sont les contributions respectives de

$$\text{Hilb}^3 L_1, \quad \text{Hilb}^3 L_2, \quad \overline{\text{Hilb}^2 L_1^0 \times L_2^0}, \quad \overline{\text{Hilb}^2 L_2^0 \times L_1^0}$$

(on a en effet  $T(\text{droite}) = -3$  puisqu'ici  $n = 1$ ).

Donc dans le calcul de l'intervention parasite de  $\theta_0$  (qu'on va effectuer maintenant) seule la composante  $\overline{\text{Hilb}^2 C_2^0 \times C_1^0}$  doit intervenir dans son intersection avec  $\mathcal{T}$ . Bien sûr il n'y a qu'elle dans un cas générique, encore une fois.

Pour effectuer le calcul de la multiplicité de  $\theta_0$  dans  $\mathcal{T} \cap \overline{\text{Hilb}^2 C_2^0 \times C_1^0}$  plaçons-nous dans des coordonnées locales  $(x, y)$  pour lesquelles

$$\begin{cases} C_2 \text{ a pour équation } y = f(x), & f \in \mathbf{C}[[x]] \quad \text{val } f \geq 2 \\ C_1 \text{ a pour équation } y = g(y), & g \in \mathbf{C}[[y]] \quad \text{val } g \geq 2. \end{cases}$$

L'idéal de  $\theta_0$  est  $(x^3, y)$  et une carte de  $\text{Hilb}^3 \mathbf{P}^2$  en  $\theta_0$  est donnée par les coefficients de l'idéal voisin

$$I(\theta) = (x^3 + 3ax^2 + 3bx + c, y + a'x^2 + b'x + c').$$

Dans cette carte,  $Al^3 \mathbf{P}^2$  s'exprime évidemment par

$$(1) \quad a' = 0$$

et sa sous-variété  $\mathcal{T}$  par

$$(2) \quad b = a^2,$$

$$(3) \quad c = a^3.$$

(Dans toute la suite on fait donc  $a' = 0$ ).

Si  $m$  est un point simple de  $C_1$ , de coordonnées  $(g(v), v)$ , il faut et il suffit pour que  $m$  soit dans  $\theta$  que l'on ait

$$(*) \begin{cases} g(v)^3 + 3ag(v)^2 + 3bg(v) + c = 0 \\ v + b'g(v) + c' = 0 \end{cases} .$$

Ces deux équations, vu (2) et (3) sont équivalentes à

$$(4) \begin{cases} (a + g(v))^3 = 0 \\ v + b'g(v) + c' = 0 \end{cases} .$$

Par le théorème des fonctions implicites, la dernière équation donne  $v = V(b', c')$ , la partie linéaire de  $V$  étant  $c'$ .

Exprimons maintenant que le doublet  $d$ , complémentaire du point simple  $m$  dans  $\theta$  est situé sur  $C_2$ . On a, vu (\*):

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = (x - g(v))(x^2 + (3a + g(v))x + 3b + 3ag(v) + (g(v))^2).$$

Posons

$$\begin{cases} 3A = 3a + g(v) = 3a + gV(b', c') \\ 3B = 3b + 3ag(v) + g(v)^2 = 3b + 3agV(b', c') + (gV(b', c'))^2. \end{cases}$$

L'idéal de  $d$  est alors

$$J = (x^2 + 3Ax + 3B, y + b'x + c')$$

et dire que  $d$  est dans  $C_2$  revient à demander l'inclusion  $J \supset (y - f(x))$ , soit demander:

$$(**) \quad f(x) + b'x + c' \text{ multiple de } x^2 + 3Ax + 3B \text{ dans } \mathbf{C}[[x]].$$

Si on écrit  $f(x) = f_2x^2 + f_3x^3 + \dots$ , il est facile de voir, par identification dans  $\mathbf{C}[[x]]$  qu'on obtient

$$\begin{cases} b' = 3f_2A + 3f_3B + M^2 & (5) \\ c' = f_2B + BM & (6) \end{cases}$$

où  $M$  est l'idéal maximal de  $\mathbf{C}[[b', c', A, B]]$ .

Ainsi l'idéal défini par les relations (1) à (6) est de multiplicité 3: les équations (1), (2), (3), (5), (6) définissent en effet une courbe non-singulière  $\Gamma$  dans les coordonnées  $(a, b, c, a', b', c')$  et l'équation (4) définit un triplet curviligne sur  $\Gamma$ .

Le calcul analogue pour les points-doubles impropres d'une surface  $S$  de  $\mathbf{P}^4$  est laissé au lecteur.

## 9°) TANGENTES D'INFLEXION DE $S(2, 3)$ ET $S(2, 4)$

Soit  $\mathcal{H}$  une hypersurface de degré 3 ou 4 dans  $\mathbf{P}^4$  et soit  $G = G(1, 4)$ . Soit  $[F] \in A^3(G)$  où  $F$  est l'ensemble des droites contenues dans une hyperquadrique  $Q$  de  $\mathbf{P}^4$ .

Soit  $[X] \in A^2(G)$  où  $X$  est l'ensemble des droites coupant  $\mathcal{H}$  suivant un triplet  $\xrightarrow{3}$  si  $\deg \mathcal{H} = 3$  ou bien suivant un quadruplet  $\xrightarrow{3}$  si  $\deg \mathcal{H} = 4$ .

Les calculs qui suivent ont lieu dans  $A^*(G)$  avec les notations de [21]. Tout d'abord, on a

$$\begin{cases} [F] \cdot (1, 3) = 4 \text{ (nombre de droites dans une quadrique de } \mathbf{P}^3 \\ \text{et coupant une droite fixe),} \\ [F] \cdot (0, 4) = 0 \text{ (un point générique de } \mathbf{P}^4 \text{ n'est pas sur } Q). \end{cases}$$

Il en résulte  $[F] = 4(1, 3)$  par dualité.

Cherchons  $[F] \cdot [X] \cdot (2, 4)$  qui représentera donc le nombre  $m$  de droites tangentes d'inflexion à  $S = \mathcal{H} \cap Q$  recoupant un plan fixe. On a

$$m = [F] \cdot [X] \cdot (2, 4) = 4 [X] \cdot (2, 4) \cdot (1, 3).$$

Or par la formule de Pieri, on a

$$(2, 4) \cdot (1, 3) = (1, 2) + (0, 3).$$

D'autre part, suivant que  $\deg \mathcal{H} = 3$  ou  $4$ , on a

$$\begin{cases} [X] \cdot (1, 2) = 9 \text{ ou } 24 \text{ (tangentes d'inflexion d'une cubique ou quartique plane)} \\ [X] \cdot (0, 3) = 6 \text{ ou } 24 \text{ (tangentes d'inflexion d'une surface cubique ou quar-} \\ \text{tique de } \mathbf{P}^3 \text{ passant par un point fixe: [34], p. 199} \\ \text{et 203).} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} m = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 6 = 60 & \text{si } \deg \mathcal{H} = 3 \\ m = 4 \cdot 24 + 4 \cdot 24 = 192 & \text{si } \deg \mathcal{H} = 4 \end{cases} .$$

Désignant le nombre de tangentes d'inflexion d'une surface de  $\mathbf{P}^4$  coupant un plan fixe par  $T$ , on a donc  $T(S(2, 3)) = 60$  et  $T(S(2, 4)) = 192$ . (Il faut vérifier que les multiplicités sont bien 1).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARBARELLO, E. *et al.* *Geometry of algebraic curves (volume I)*. Springer-Verlag (1985).
- [2] CAYLEY, A. On skew surfaces, otherwise scrolls. *Collected Papers V*, 168-220.
- [3] COLLEY, S. Enumerating stationary multiple-points. *Adv. in Maths*, à paraître.
- [4] ELENCAWJG, G. et P. LE BARZ. L'anneau de Chow de  $\text{Hilb}^3 \mathbf{P}^2$ . A paraître.
- [5] FOGARTY, J. Algebraic families on an algebraic surface. *Amer. J. Math.* 90 (1968), 511-521.
- [6] FULTON, W. and R. MACPHERSON. Intersecting cycles on an algebraic variety. *Real and Complex singularities*, Oslo (1976), Sijthoof & Noordhoof, 179-197.
- [7] FULTON, W. *Intersection theory*. Springer-Verlag (1984).
- [8] GRANGER, M. *Géométrie des schémas de Hilbert ponctuels*. Mém. Soc. Math. France n° 8 (1983).
- [9] GRIFFITHS, P. and J. HARRIS. *Algebraic Geometry*. Wiley & Sons, New York (1978).
- [10] GROTHENDIECK, A. Les schémas de Hilbert. *Séminaire Bourbaki*, exposé 221 (1961), IHP Paris.
- [11] ——— EGA I. *Publ. Math. IHES* 4 (1960), 1-228.
- [12] GRUSON, L. et C. PESKINE. Courbes de l'espace projectif: variétés de sécantes. *Enumerative Geometry and classical algebraic Geometry*, Nice (1981), Prog. in Maths n° 24, Birkhäuser, 1-31.